

## 4. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

---

Como visto no Capítulo 2 (Seção 2.3), os métodos de análise de estruturas têm como metodologia a superposição de casos básicos. No Método das Forças os casos básicos são soluções estaticamente determinadas (isostáticas) e no Método dos Deslocamentos são soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas). Essas soluções, chamadas de *soluções fundamentais*, formam a base da resolução dos métodos de análise.

Este capítulo apresenta algumas soluções fundamentais da análise de estruturas. O objetivo aqui é dar subsídios para os métodos de análise tratados neste livro. Resumidamente, o que é necessário para a resolução de uma estrutura pelo Método das Forças é a determinação de deslocamentos e rotações em estruturas isostáticas. E, para o Método dos Deslocamentos, é necessária a determinação de forças e momentos que impõem uma configuração deformada conhecida para uma estrutura.

A dedução dessas soluções fundamentais é feita com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais, através de suas duas formulações – Princípio das Forças Virtuais e Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Esta apresentação está fortemente calcada nos livros de White *et al.* (1976) e Tauchert (1974).

### 4.1. Traçado do diagrama de momentos fletores

Conforme mencionado nos capítulos anteriores, para o entendimento dos métodos de análise tratados neste livro é necessário um conhecimento adequado da resolução de estruturas estaticamente determinadas e do traçado de diagramas de esforços internos (esforços axiais, esforços cortantes, momentos fletores e momentos torçores). Duas boas referências para esses assuntos são os livros de Süsskind (1977-1) e Campanari (1985). Nesta seção apenas são salientados alguns aspectos importantes no traçado do diagrama de momentos fletores.

Primeiro, o diagrama de momentos fletores não é indicado com sinal. A convenção adotada é que o diagrama é traçado sempre do lado da fibra tracionada da barra.

Outro ponto importante é que esse traçado é feito convenientemente por superposição de efeitos em cada barra, sempre partindo dos valores dos momentos fletores nas extremidades da barra. Considere, como exemplo, a viga biapoçada com balanços mostrada na Figura 4.1. Nessa figura estão mostrados as cargas, as reações de apoio e os diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores.

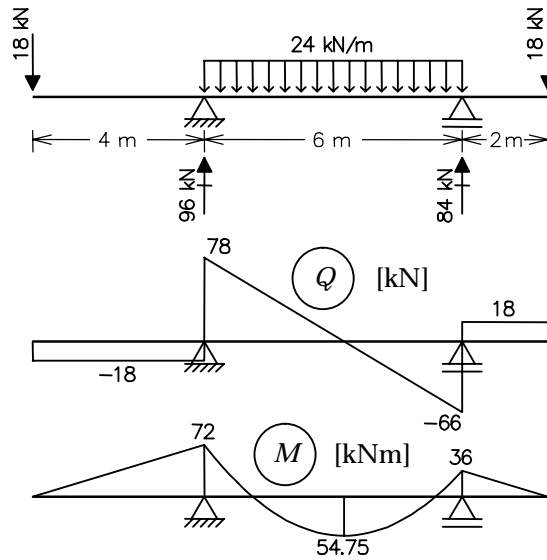


Figura 4.1 – Viga biapoiada com balanços.

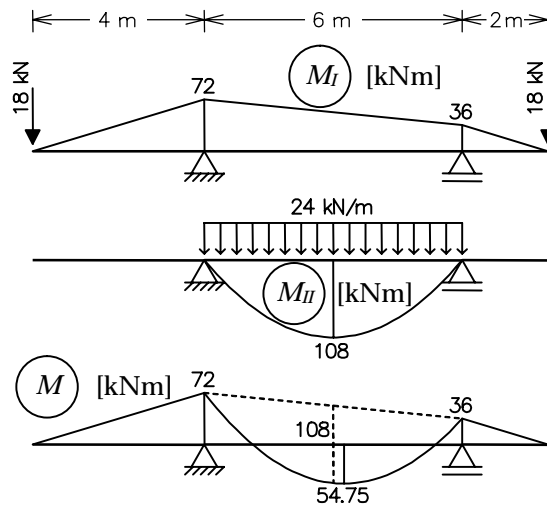


Figura 4.2 – Superposição de efeitos para compor o diagrama de momentos fletores da Figura 4.1.

A Figura 4.2 ilustra a superposição que é utilizada para compor o diagrama de momentos fletores. Considere a barra central entre apoios. O diagrama final ( $M$ ) nessa barra é obtido pela superposição de um diagrama reto ( $M_I$ ), que é o traçado que une os valores dos momentos fletores nas extremidades da barra com um diagrama parabólico ( $M_{II}$ ), que corresponde ao carregamento atuando no interior da

barra considerada como biapoiada. O diagrama  $M_I$  é sempre uma linha reta pois corresponde a uma situação em que a barra está descarregada. Isso porque  $d^2M/dx^2 = 0$  (pela Equação (3.10) do Capítulo 3, com carregamento distribuído transversal nulo).

O procedimento de superposição de efeitos mostrado na Figura 4.2 é conhecido como *pendurar o diagrama de viga biapoiada para o carregamento que atua no interior da barra*. Dessa forma, o traçado do diagrama de momentos fletores em cada barra é feito em duas etapas. Primeiro determinam-se os momentos fletores nas extremidades da barra. Se a barra não tiver cargas transversais no seu interior, o diagrama final é obtido simplesmente unindo os valores extremos por uma linha reta (é o que acontece nos balanços da viga da Figura 4.1). Em um segundo passo, se a barra tiver carregamento no seu interior, o diagrama de viga biapoiada para o carregamento é “pendurado” (superposto transversalmente) a partir da linha reta que une os valores extremos.

Esse procedimento também é aplicado para pórticos, como o que está mostrado na Figura 4.3. Observa-se nessa figura que o traçado do diagrama de momentos fletores na barra horizontal é feito da mesma maneira que para a barra central da viga da Figura 4.2. Depois de calculadas as reações de apoio, determinam-se os valores dos momentos fletores nos nós do pórtico. Nesse caso, os momentos fletores traçiam as fibras de fora e, por isso, os diagramas nos nós são desenhados no lado externo do quadro (esta é a convenção utilizada). Nota-se também que os valores dos momentos fletores em cada nó são iguais para as barras adjacentes. Este é sempre o caso quando se têm duas barras chegando em um nó e não existe uma carga momento concentrado atuando no nó. Para as barras verticais, que não têm carga no interior, o diagrama final é reto. Para a barra horizontal, o diagrama é obtido “pendurando”, a partir da linha reta, a parábola do segundo grau que corresponde ao diagrama de viga biapoiada do carregamento uniformemente distribuído.

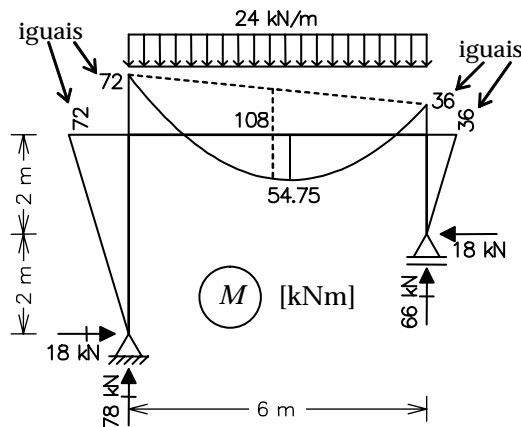


Figura 4.3 – Traçado de diagrama de momentos fletores em um pórtico plano.

A Figura 4.4 mostra diagramas de momentos fletores de viga biapoada para cargas usuais: carga uniformemente distribuída, carga concentrada no centro da viga e carga concentrada em uma posição qualquer na viga.

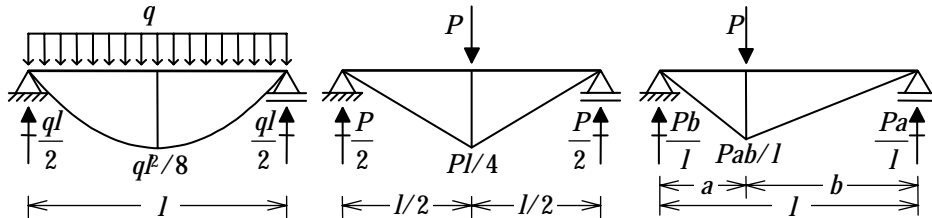


Figura 4.4 – Diagramas de momentos fletores para vigas biapoadas.

Outro aspecto interessante é a obtenção do diagrama de esforços cortantes a partir do diagrama de momentos fletores. Esse procedimento é feito isolando-se cada barra da estrutura, tal como mostrado na Figura 4.5 para a barra horizontal do pórtico da Figura 4.3. A barra é considerada como uma viga biapoada com cargas momentos aplicadas nas extremidades para representar o efeito do restante da estrutura sobre ela. Os valores dos esforços cortantes nas extremidades das barras são determinados calculando-se as reações de apoio da viga biapoada por superposição de casos. O caso *I* corresponde às cargas momentos nas extremidades da barra e o caso *II* ao carregamento atuando no interior da barra.

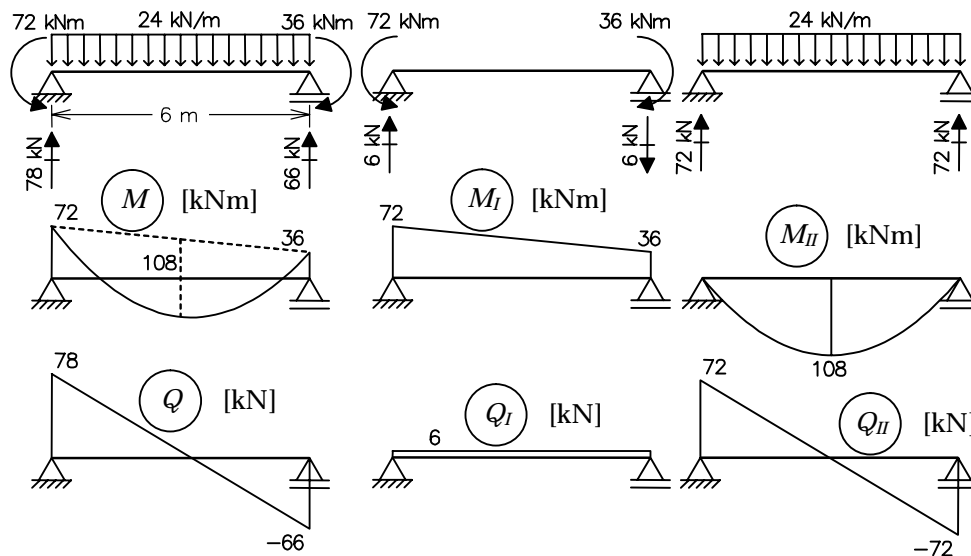


Figura 4.5 – Traçado do diagrama de esforços cortantes a partir do diagrama de momentos fletores.

O cálculo das reações de apoio (esforços cortantes) nas extremidades,  $V_{esq}$  (na esquerda) e  $V_{dir}$  (na direita), do exemplo da Figura 4.5 é mostrado abaixo:

$$V_{esq} = +(72 - 36) \div 6 + (24 \cdot 6) \div 2 = +6 + 72 = 78 \text{ kN};$$

$$V_{dir} = -(72 - 36) \div 6 + (24 \cdot 6) \div 2 = -6 + 72 = 66 \text{ kN}.$$

Esse procedimento mostra a importância da obtenção do diagrama de momentos fletores, pois isso possibilita a obtenção do diagrama de esforços cortantes.

Deve-se também ressaltar que, embora os exemplos utilizados nesta seção tenham sido isostáticos, os mesmos procedimentos se aplicam para estruturas hiperestáticas. Dessa forma, uma vez que se tenham determinado os valores dos momentos fletores nas extremidades de qualquer barra e que se conheça o carregamento atuando no seu interior, podem-se traçar os diagramas de momentos fletores e de esforços cortantes na barra.

O traçado de diagramas de momentos fletores é muito importante também dentro da metodologia do Método das Forças. Conforme será visto na Seção 4.3.1, esses diagramas são utilizados nos cálculos de deslocamentos e rotações em estruturas isostáticas, que correspondem a soluções fundamentais utilizadas por esse método.

## 4.2. Energia de deformação e princípio da conservação de energia

O princípio geral da conservação de energia é muito importante em vários métodos da análise de estruturas. Esse princípio, que é expresso como um balanço de energia (ou trabalho), se aplica tanto para estruturas rígidas quanto deformáveis. Quando uma estrutura rígida em equilíbrio é submetida a um campo de deslocamentos arbitrário, a soma algébrica do trabalho produzido por todas as forças aplicadas pelos respectivos deslocamentos deve resultar em um valor nulo. Em estruturas deformáveis, existe um termo adicional de energia devido ao trabalho produzido pelas tensões internas com as correspondentes deformações. A integral dessa componente pontual (infinitesimal) de trabalho ao longo do volume da estrutura é denominada *energia de deformação interna* e deve ser levada em conta no balanço de energia. Uma estrutura deformável deve ser vista como um sistema elástico, tal como uma mola linear. A diferença é que uma estrutura é um sistema elástico contínuo, no qual cada ponto armazena uma parcela da energia total de deformação.

A Figura 4.6 mostra um elemento infinitesimal de volume de uma estrutura submetido a uma deformação normal na direção  $x$ . A energia de deformação por unidade de volume,  $U_0$ , armazenada nesse elemento é a área abaixo da curva tensão-deformação, tal como indicado na figura. No caso do material com comportamento linear, a relação tensão-deformação é dada pela Equação (2.3) do Capítulo 2 e a energia de deformação por unidade de volume tem a seguinte expressão:

$$U_0 = \int \sigma_x \cdot d\varepsilon_x = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \varepsilon_x. \quad (4.1)$$

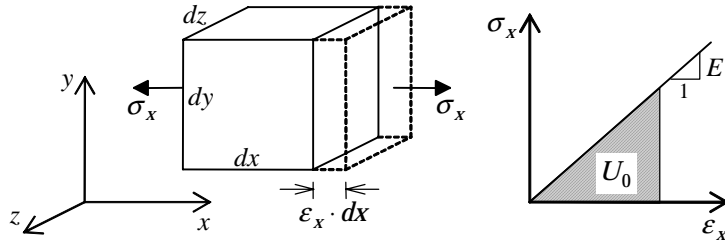


Figura 4.6 – Elemento infinitesimal de volume submetido a uma deformação normal.

A energia de deformação por unidade de volume pode ser generalizada para as outras componentes de deformação. No caso de uma barra de um pórtico plano, a energia de deformação por unidade de volume é composta por (veja a definição das deformações e das tensões na Seção 3.1 do Capítulo 3):

$$U_0 = U_0^a + U_0^f + U_0^c = \frac{1}{2} \sigma_x^a \cdot \varepsilon_x^a + \frac{1}{2} \sigma_x^f \cdot \varepsilon_x^f + \frac{1}{2} \tau_y^c \cdot \gamma^c. \quad (4.2)$$

Sendo:

$U_0^a = \frac{1}{2} \sigma_x^a \cdot \varepsilon_x^a \rightarrow$  energia de deformação por unidade de volume para o efeito axial;

$U_0^f = \frac{1}{2} \sigma_x^f \cdot \varepsilon_x^f \rightarrow$  energia de deformação por unidade de volume para o efeito de flexão;

$U_0^c = \frac{1}{2} \tau_y^c \cdot \gamma^c \rightarrow$  energia de deformação por unidade de volume para o efeito cortante.

No caso de grelhas e quadros espaciais, o efeito de torção também deve ser considerado. Para uma seção com simetria radial, tem-se:

$U_0^t = \frac{1}{2} \tau^t \cdot \gamma^t \rightarrow$  energia de deformação por unidade de volume para o efeito de torção.

Para seções sem simetria radial, a energia de deformação é computada de uma forma integral ao longo de uma seção transversal, como será mostrado adiante.

A energia de deformação interna total é obtida pela integração da energia  $U_0$  ao longo de todo o volume da estrutura. Para pórticos planos, tem-se:

$$U = \int_V U_0 \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^a \cdot \varepsilon_x^a \cdot dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^f \cdot \varepsilon_x^f \cdot dV + \frac{1}{2} \int_V \tau_y^c \cdot \gamma^c \cdot dV. \quad (4.3)$$

No modelo matemático de estruturas reticuladas, as barras são representadas pelos eixos que passam pelos centros de gravidade das seções transversais. Nesse modelo, a energia de deformação também tem uma representação integral no nível de seção transversal, resultando em uma energia de deformação por unidade de comprimento de barra. A obtenção das expressões dessa energia é feita separando a integral de volume da Equação (4.3) em uma integral de área (ao longo da seção transversal) e uma integral de linha (ao longo do comprimento das barras):

$$U = \int_{\text{estrutura}} \left[ \int_A U_0^a dA + \int_A U_0^f dA + \int_A U_0^c dA \right] \cdot dx = \int_{\text{estrutura}} dU^a + \int_{\text{estrutura}} dU^f + \int_{\text{estrutura}} dU^c. \quad (4.4)$$

Sendo:

$U \rightarrow$  energia de deformação elástica total armazenada na estrutura;

$dU^a \rightarrow$  energia de deformação para o efeito axial armazenada em um elemento infinitesimal de barra;

$dU^f \rightarrow$  energia de deformação para o efeito de flexão armazenada em um elemento infinitesimal de barra;

$dU^c \rightarrow$  energia de deformação para o efeito cortante armazenada em um elemento infinitesimal de barra.

A expressão para  $dU^a$  é obtida com base nas Equações (3.2) e (3.11) do Capítulo 3:

$$dU^a = \frac{1}{2} \int_A \sigma_x^a \cdot \frac{du}{dx} \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2} N \cdot du, \quad (4.5)$$

sendo  $N$  o esforço normal na seção transversal e  $du$  o deslocamento axial relativo interno dado pela Equação (3.15) (veja a Figura 3.10).

A expressão para  $dU^f$  é obtida com base nas Equações (3.3) e (3.12):

$$dU^f = \frac{1}{2} \int_A \sigma_x^f \cdot \left( -\frac{d\theta}{dx} \cdot y \right) \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2} M \cdot d\theta, \quad (4.6)$$

sendo  $M$  o momento fletor na seção transversal e  $d\theta$  a rotação relativa interna por flexão dada pela Equação (3.16) (veja a Figura 3.11).

A expressão para  $dU^c$  é obtida com base nas Equações (3.5) e (3.13) :

$$dU^c = \frac{1}{2} \int_A \tau_y^c \cdot \frac{dh}{dx} \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2} Q \cdot dh, \quad (4.7)$$

sendo  $Q$  o esforço cortante na seção transversal e  $dh$  o deslocamento transversal relativo interno dado pela Equação (3.17) (veja a Figura 3.12).

No caso de grelhas e pórticos espaciais, o efeito de torção deve ser considerado:

$dU^t$  → energia de deformação para o efeito de torção armazenada em um elemento infinitesimal de barra.

A expressão para  $dU^t$ , para seções transversais com simetria radial, é obtida com base nas Equações (3.6) e (3.18). Para uma seção genérica sem simetria radial,  $dU^t$  é obtida de forma integral na seção transversal (consulte a Seção 3.4.4), resultando em:

$$dU^t = \frac{1}{2} T \cdot d\varphi, \quad (4.8)$$

sendo  $T$  o momento torçor na seção transversal e  $d\varphi$  a rotação relativa interna por torção dada pela Equação (3.19) (veja a Figura 3.13).

A energia de deformação interna  $U$  é utilizada no princípio geral da conservação de energia. A aplicação desse princípio no contexto da análise estrutural tratada neste livro requer a definição das seguintes premissas:

- O carregamento é aplicado lentamente, de tal forma que não provoca vibrações na estrutura (não existe energia cinética).
- O único tipo de energia armazenada pela estrutura é a energia de deformação elástica, não existindo perda de energia na forma de calor, ruído, etc.
- A estrutura tem um comportamento linear-elástico, isto é, o material da estrutura trabalha em um regime elástico e linear (não existe plastificação em nenhum ponto) e os deslocamentos da estrutura são pequenos o suficiente para se escrever as equações de equilíbrio na configuração indeformada da estrutura.

Considerando essas hipóteses, o princípio da conservação de energia se reduz a:

$$W_E = U, \quad (4.9)$$

sendo:

$W_E$  → trabalho realizado pelas forças externas quando a estrutura se deforma.

Isto é, o trabalho mecânico realizado pelas cargas aplicadas em uma estrutura é igual à energia de deformação interna armazenada na estrutura. Se as cargas forem removidas lentamente, o trabalho mecânico vai ser recomposto, da mesma forma que ocorre na compressão e descompressão de uma mola.

A aplicação direta desse princípio é ilustrada abaixo na determinação do deslocamento no ponto central da viga mostrada na Figura 4.7, submetida a uma força vertical  $P_1$  aplicada no meio do vão. Deseja-se calcular o deslocamento vertical  $D_1$  no ponto de aplicação da carga. É desprezada a energia de deformação por cisa-



lhamento em presença da energia de deformação por flexão. O diagrama de momentos fletores da viga para esse carregamento também está mostrado na figura.

O trabalho realizado pela força externa é a área abaixo da curva que relaciona a carga com o deslocamento do seu ponto de aplicação, tal como indicado na Figura 4.7. As reações de apoio da viga, que também são forças externas, não produzem trabalho pois os deslocamentos correspondentes são nulos (restrições de apoio).

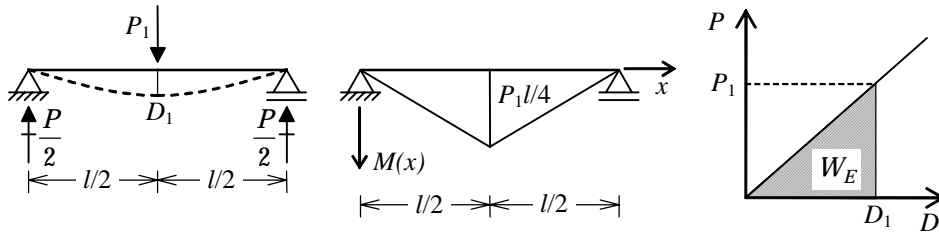


Figura 4.7 – Viga biapoiada com uma carga central.

Portanto, considerando um comportamento linear para a estrutura, o trabalho total das forças externas para esse exemplo é:

$$W_E = \frac{1}{2} P_1 \cdot D_1.$$

Como não existem esforços axiais nessa estrutura e a energia de deformação por cisalhamento é desprezada, a energia de deformação elástica é função apenas do efeito de flexão. Considerando as Equações (4.4), (4.6) e (3.16), tem-se:

$$U = \int_{\text{estrutura}} dU^f = \frac{1}{2} \int_0^l M \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_0^l M \cdot \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

Igualando o trabalho externo com a energia de deformação interna, chega-se a:

$$\frac{1}{2} P_1 \cdot D_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx.$$

Finalmente, o deslocamento vertical do ponto central é dado por:

$$D_1 = \frac{1}{P_1} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \Rightarrow D_1 = \frac{P_1 \cdot l^3}{48EI}.$$

Observa-se que a utilização do princípio da conservação de energia possibilitou o cálculo do deslocamento vertical do ponto central dessa viga. Entretanto, este princípio não permite o cálculo de deslocamento de uma forma genérica. Considere, por exemplo, que se deseja aplicar uma outra carga na estrutura ou determinar o deslocamento em outro ponto. Nesses casos, o princípio da conservação de energia não fornece meios para o cálculo desejado. Isso porque uma única equação

$W_E = U$  não é suficiente para a determinação de mais de um deslocamento desconhecido. A solução para isso é a generalização desse princípio para o Princípio dos Trabalhos Virtuais, conforme vai ser mostrado na seção a seguir.

### 4.3. Princípio dos trabalhos virtuais

O princípio da conservação de energia é bastante intuitivo mas tem uma aplicação muito limitada para o cálculo de deslocamentos em estruturas. Basicamente, como visto na seção anterior, este princípio só permite calcular deslocamentos para o caso de solicitação de uma força concentrada, e o deslocamento calculado tem que ser no ponto de aplicação e na direção da força. Analogamente, também é possível calcular a rotação na direção de um momento concentrado aplicado.

Esse princípio pode ter seu enfoque modificado de forma a eliminar as limitações notadas acima. Considere um sistema de forças  $(F_A, f_A)$  em equilíbrio e uma configuração deformada  $(D_B, d_B)$  compatível tal como definidos na Seção 3.7 do Capítulo 3. Isto é,  $F_A$  é um sistema de forças externas (solicitações e reações de apoio) atuando sobre uma estrutura,  $f_A$  são esforços internos  $(N_A, M_A, Q_A)$  em equilíbrio com  $F_A$ ,  $D_B$  é um campo de deslocamentos externos (elástica) de uma estrutura e  $d_B$  é um campo de deslocamentos relativos internos  $(du_B, d\theta_B, dh_B)$  compatíveis com  $D_B$ .

A generalização que é feita em relação ao princípio de conservação de energia é que, agora, não existe qualquer ligação entre o sistema de forças e a configuração deformada, a não ser que atuam em uma mesma estrutura. Isto é, não existe relação causa-efeito entre  $(F_A, f_A)$  e  $(D_B, d_B)$ . O balanço entre o trabalho externo e a energia de deformação interna combinando esses dois sistemas independentes resulta no *Princípio dos Trabalhos Virtuais* (PTV):

$$\overline{W}_E = \overline{U} \rightarrow \sum F_A \cdot D_B = \int f_A \cdot d_B \quad (4.10)$$

em equilíbrio  
  
compatíveis

Sendo:

$\overline{W}_E = \sum F_A \cdot D_B \rightarrow$  trabalho virtual das forças externas  $F_A$  com os correspondentes deslocamentos (externos)  $D_B$ ;

$\overline{U} = \int f_A \cdot d_B \rightarrow$  energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos  $f_A$  com os correspondentes deslocamentos relativos internos  $d_B$ .

No caso de pórticos planos, a energia de deformação interna virtual pode ser desmembrada em parcelas que consideram os efeitos axial, de flexão e cortante:

$$\bar{U} = \int N_A \cdot du_B + \int M_A \cdot d\theta_B + \int Q_A \cdot dh_B. \quad (4.11)$$

Deve-se salientar que nas Equações (4.10) e (4.11) o termo “ $\frac{1}{2}$ ” não aparece nem na expressão do trabalho externo virtual nem na expressão da energia de deformação interna virtual. Esse termo aparecia nas expressões do princípio da conservação de energia mostrado na Seção 4.2 porque forças e deslocamentos estavam associados (causa e efeito). No trabalho externo virtual, as forças não são a causa ou efeito dos deslocamentos, assim como na energia interna virtual os esforços internos não são a causa ou efeito dos deslocamentos relativos internos. Devido justamente a essa independência entre forças e deslocamentos, o termo *virtual* se aplica. Em outras palavras, o trabalho  $\bar{W}_E$  e a energia de deformação  $\bar{U}$  são ditos *virtuais* porque eles são meras abstrações de cálculo.

O PTV só é válido se o sistema de forças ( $F_A, f_A$ ) realmente satisfizer as condições de equilíbrio e se a configuração deformada ( $D_B, d_B$ ) realmente satisfizer as condições de compatibilidade.

Portanto, esse princípio pode ser utilizado para impor condições de compatibilidade a uma configuração deformada ( $D, d$ ) qualquer. Basta que se escolha arbitrariamente um sistema de forças ( $\bar{F}, \bar{f}$ ), denominado virtual, do qual se saiba que satisfaz as condições de equilíbrio. Esta versão do PTV é chamada de Princípio das Forças Virtuais e vai ser apresentada na próxima seção.

De maneira análoga, o PTV pode ser utilizado para impor condições de equilíbrio a um sistema de forças ( $F, f$ ) qualquer. Basta que se escolha arbitrariamente uma configuração deformada ( $D, d$ ), denominada virtual, da qual se saiba que satisfaz as condições de compatibilidade. Esta versão do PTV é chamada de Princípio dos Deslocamentos Virtuais e será apresentada na Seção 4.3.2.

### 4.3.1. Princípio das forças virtuais

Em muitas situações na análise de estruturas é necessário impor condições de compatibilidade a uma configuração deformada. Por exemplo, quando se calcula uma componente de deslocamento em um ponto de uma estrutura, o que se deseja é o valor do deslocamento que é compatível com a configuração deformada da estrutura, que é provocada por alguma solicitação. No contexto deste livro, o cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas é a principal solução fundamental utilizada dentro da metodologia do Método das Forças, tal como introduzido na Seção 2.3.1 do Capítulo 2.

O *Princípio das Forças Virtuais* (PFV) é uma das principais ferramentas para a determinação de deslocamentos em estruturas. Esse princípio diz que:

- Dada uma configuração deformada real ( $D, d$ ) e um sistema de forças ( $\bar{F}, \bar{f}$ ) arbitrário (virtual) em equilíbrio, a igualdade  $\bar{W}_E = \bar{U}$  estabelece uma condição de compatibilidade para a configuração deformada real.

Sendo que:

$\bar{W}_E = \sum \bar{F} \cdot D \rightarrow$  trabalho das forças externas virtuais  $\bar{F}$  com os correspondentes deslocamentos externos reais  $D$ ;

$\bar{U} = \int \bar{f} \cdot d \rightarrow$  energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos virtuais  $\bar{f}$  com os correspondentes deslocamentos relativos internos reais  $d$ .

O PFV utiliza um sistema auxiliar, chamado *sistema virtual*, que é completamente independente do *sistema real*, sendo este a estrutura da qual se quer calcular um deslocamento ou rotação (ou estabelecer uma condição de compatibilidade). O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com cargas diferentes. As cargas do sistema virtual são compostas de uma força (ou momento) escolhida arbitrariamente na direção do deslocamento (ou rotação) que se deseja calcular e de suas correspondentes reações de apoio. As cargas do sistema virtual não existem na realidade (por isso, são ditas *virtuais*) e são meras abstrações para cálculo.

Considere a viga biapoiada mostrada na Figura 4.8 com uma carga concentrada  $P_1$  no centro (sistema real). Deseja-se determinar o valor do deslocamento  $D_2$  em um ponto qualquer definido por uma distância  $a$  ao apoio da esquerda. O sistema virtual é definido arbitrariamente com um força  $\bar{P}_2$  aplicada nesse ponto e com a mesma direção do deslocamento. Nessa figura estão indicados os diagramas de momentos fletores  $M$  e  $\bar{M}$  dos sistemas real e virtual.

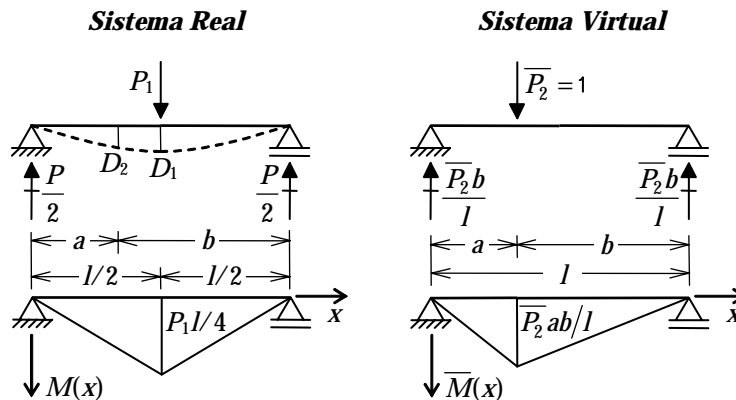


Figura 4.8 – Cálculo de deslocamento genérico em viga biapoiada com uma carga central.

O PFV aplicado à viga da Figura 4.8 resulta em (desprezando deformações provenientes do efeito cortante):

$$\overline{W}_E = \overline{U} \rightarrow \overline{P}_2 \cdot D_2 = \int_0^l \overline{M} \cdot d\theta,$$

sendo  $d\theta$  a rotação relativa interna do sistema real. Pela Equação (3.16), tem-se:

$$D_2 = \frac{1}{\overline{P}_2} \cdot \int_0^l \frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI} dx.$$

Portanto, o PFV permite o cálculo de deslocamentos e rotações de forma generalizada. As cargas da estrutura real podem ser quaisquer e podem-se calcular deslocamentos e rotações em qualquer ponto e em qualquer direção.

Nesse exemplo, a magnitude da força virtual  $\overline{P}_2$  é irrelevante, haja vista que o valor dessa força vai se cancelar na expressão acima pois o diagrama de momentos fletores virtuais  $\overline{M}$  é uma função linear de  $\overline{P}_2$ . Entretanto, usualmente adota-se um valor unitário para a carga virtual.

Observa-se que a aplicação do PFV para o cálculo de deslocamentos em estruturas que trabalham à flexão resulta no cálculo de uma integral que combina diagramas de momentos fletores nos sistemas real e virtual. A Tabela 4.1 mostra expressões para avaliar essa integral para diagramas usuais em uma barra.

Tabela 4.1 – Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l \overline{M}M dx$					
			$\overline{M}_A M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_A l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C M_B l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_C l$
			$\frac{2}{3} \overline{M}_A M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$

A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico de um ponto de um pórtico plano é obtida das Equações (4.10) e (4.11):

$$\overline{W}_E = \overline{U} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[ \int_{\text{estrutura}} \overline{N} \cdot du + \int_{\text{estrutura}} \overline{M} \cdot d\theta + \int_{\text{estrutura}} \overline{Q} \cdot dh \right]. \quad (4.12)$$

Em que:

$\Delta$  → deslocamento genérico a ser calculado no sistema real;

$du$  → deslocamento axial relativo interno no sistema real;

$d\theta$  → rotação relativa interna por flexão no sistema real;

$dh$  → deslocamento transversal relativo interno no sistema real;

$\overline{P}$  → carga virtual genérica associada ao deslocamento a ser calculado;

$\overline{N}$  → esforço normal no sistema virtual provocado por  $\overline{P}$ ;

$\overline{M}$  → momento fletor no sistema virtual provocado por  $\overline{P}$ ;

$\overline{Q}$  → esforço cortante no sistema virtual provocado por  $\overline{P}$ .

No caso de uma grelha (estrutura plana com cargas fora do plano), o efeito de torção também deve ser considerado, resultando na seguinte expressão para o cálculo de um deslocamento genérico pelo PFV:

$$\overline{W}_E = \overline{U} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[ \int_{\text{estrutura}} \overline{M} \cdot d\theta + \int_{\text{estrutura}} \overline{T} \cdot d\varphi + \int_{\text{estrutura}} \overline{Q} \cdot dh \right]. \quad (4.13)$$

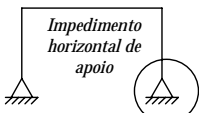
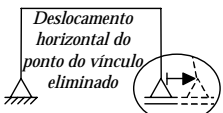
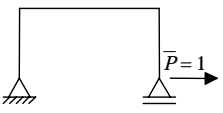

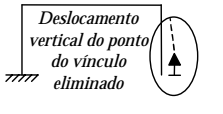
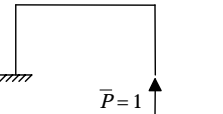
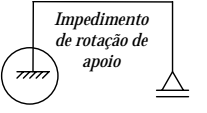
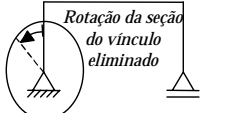
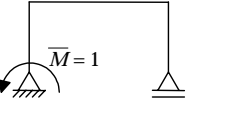

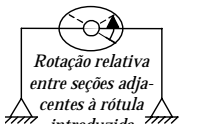
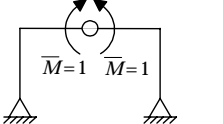
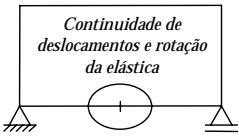

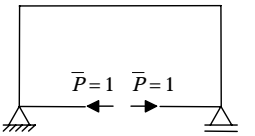
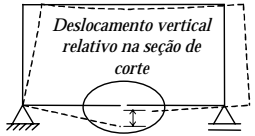
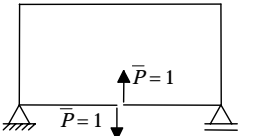

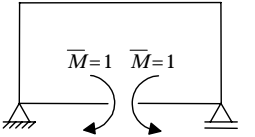
Sendo:

$d\varphi$  → rotação relativa interna por torção no sistema real;

$\overline{T}$  → momento torçor no sistema virtual provocado por  $\overline{P}$ .

A Tabela 4.2 mostra alguns tipos de cargas virtuais utilizadas dentro do contexto do PFV para calcular deslocamentos e rotações em pontos de um pórtico plano. As cargas virtuais mostradas nessa tabela são utilizadas, dentro da metodologia de cálculo do Método das Forças, para determinar deslocamentos ou rotações nas direções de vínculos eliminados de estruturas hiperestáticas. Como visto na Seção 2.3.1 do Capítulo 2, o Método das Forças utiliza uma estrutura auxiliar isostática, chamada Sistema Principal, que é obtida da estrutura original (hiperestática) pela eliminação de vínculos. Esses vínculos podem ser impedimentos de apoio ou vínculos de continuidade interna, e os deslocamentos e rotações são sempre calculados nas direções dos vínculos eliminados. O próximo capítulo aborda essa metodologia em detalhes.

Tabela 4.2 – Cargas virtuais utilizadas para calcular deslocamentos e rotações em vínculos eliminados de estruturas hiperestáticas.

<b>Vínculo eliminado</b>	<b>Deslocamento ou rotação associado(a)</b>	<b>Carga virtual</b>
 <p>Impedimento horizontal de apoio</p>	 <p>Deslocamento horizontal do ponto do vínculo eliminado</p>	 <p><math>\bar{P} = 1</math></p>
 <p>Impedimento vertical de apoio</p>	 <p>Deslocamento vertical do ponto do vínculo eliminado</p>	 <p><math>\bar{P} = 1</math></p>
 <p>Impedimento de rotação de apoio</p>	 <p>Rotação da seção do vínculo eliminado</p>	 <p><math>\bar{M} = 1</math></p>
 <p>Continuidade de rotação da elástica</p>	 <p>Rotação relativa entre seções adjacentes à rótula introduzida</p>	 <p><math>\bar{M} = 1</math> <math>\bar{M} = 1</math></p>
 <p>Continuidade de deslocamentos e rotação da elástica</p>	 <p>Deslocamento horizontal relativo na seção de corte</p>	 <p><math>\bar{P} = 1</math> <math>\bar{P} = 1</math></p>
	 <p>Deslocamento vertical relativo na seção de corte</p>	 <p><math>\bar{P} = 1</math> <math>\bar{P} = 1</math></p>
	 <p>Rotação relativa na seção de corte</p>	 <p><math>\bar{M} = 1</math> <math>\bar{M} = 1</math></p>

Os deslocamentos relativos internos no sistema real dependem da solicitação externa que atua sobre a estrutura. Os deslocamentos relativos internos foram definidos na Seção 3.4 do Capítulo 3 para o caso de solicitações de carregamentos externos. Entretanto, existem outros tipos de solicitações que também provocam deformações em estruturas.

As seções a seguir mostram aplicações do PFV para o cálculo de deslocamentos (e rotações) em estruturas isostáticas devidos a diferentes tipos de solicitações: carregamento externo, variação de temperatura e recalque de apoio. Na seqüência também é mostrada uma aplicação do PFV para a verificação do atendimento a condições de compatibilidade de estruturas hiperestáticas.

#### 4.3.1.1. Deslocamentos provocados por carregamento externo

As solicitações externas mais comuns em uma estrutura são carregamentos aplicados, tais como peso próprio, cargas de ocupação, cargas móveis, cargas de vento, etc. A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico devido a solicitações desse tipo em um quadro plano é obtida substituindo as Equações (3.15), (3.16) e (3.17) dos deslocamentos relativos internos reais na Equação (4.12):

$$\Delta = \frac{1}{P} \left[ \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx + \int_{\text{estrutura}} \chi \frac{\bar{Q} \cdot Q}{GA} dx \right]. \quad (4.14)$$

Sendo:

$N \rightarrow$  esforço normal no sistema real provocado pelo carregamento externo;

$M \rightarrow$  momento fletor no sistema real provocado pelo carregamento externo;

$Q \rightarrow$  esforço cortante no sistema real provocado pelo carregamento externo.

No caso de uma grelha, utilizando a Equação (3.19), a expressão do PFV resulta em:

$$\Delta = \frac{1}{P} \left[ \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{T} \cdot T}{GJ_t} dx + \int_{\text{estrutura}} \chi \frac{\bar{Q} \cdot Q}{GA} dx \right]. \quad (4.15)$$

Sendo:

$T \rightarrow$  momento torçor no sistema real provocado pelo carregamento externo.

A última integral que considera o efeito de cisalhamento (cortante) nas Equações (4.14) e (4.15) tem valor pequeno em comparação com os outros termos no caso de barras longas (altura da seção transversal menor que aproximadamente  $\frac{1}{4}$  do vão da barra). Nesse caso a integral é desprezada.



A estrutura da Figura 4.3 vai ser utilizada para exemplificar o cálculo de deslocamento em um pórtico plano. Considere que se deseja calcular o deslocamento horizontal do apoio da direita. A Figura 4.9 mostra os sistemas real e virtual utilizados, com a configuração deformada real (onde o deslocamento desejado  $\Delta$  está indicado) e o diagrama de momentos fletores virtual  $\bar{M}$ . O diagrama de momentos fletores real  $M$  está indicado na Figura 4.3. O material adotado é um aço com módulo de elasticidade  $E = 2,05 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ . Para as colunas é adotada a seção transversal CS 200x52.3, com área  $A_c = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  e momento de inércia  $I_c = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ . A seção transversal da viga é a VS 300x43.0, com área  $A_v = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  e momento de inércia  $I_v = 8,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ .

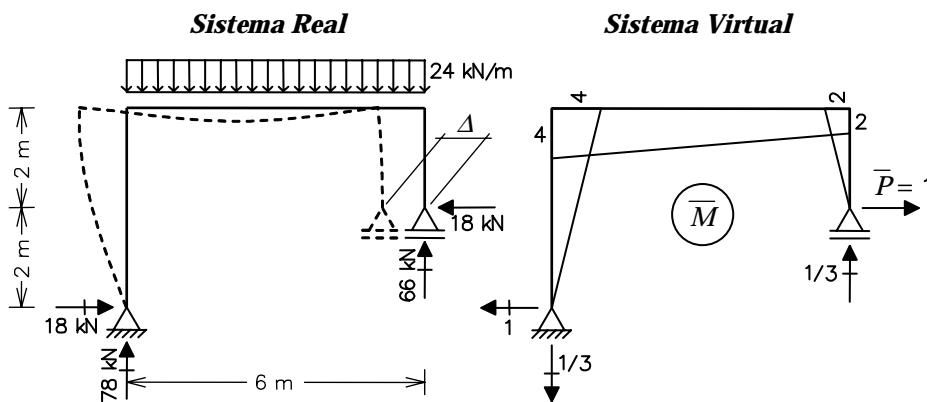


Figura 4.9 – Cálculo de deslocamento devido a um carregamento externo pelo PFV.

A energia de deformação interna virtual para o cálculo do deslocamento da estrutura da Figura 4.9 é composta de duas parcelas, uma provocada pelos efeitos axiais e outra pelos efeitos de flexão. O cálculo da parcela associada aos efeitos axiais é mostrado abaixo, sendo que a integral ao longo da estrutura é decomposta em um somatório de integrais ao longo das três barras:

$$\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx = \sum_{\text{barras}} \left[ \int_{\text{barra}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx \right] = \sum_{\text{barras}} \left[ \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} \cdot l \right]_{\text{barra}} \quad (4.16)$$

Nessa expressão, os esforços normais reais  $N$  e virtuais  $\bar{N}$  são obtidos diretamente das reações de apoio indicados na Figura 4.9 e  $l$  é o comprimento de uma barra. Dessa forma, tem-se:

$$\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx = \left[ \frac{(+1) \cdot (-18)}{EA_v} \cdot 6 \right] + \left[ \frac{(+1/3) \cdot (-78)}{EA_c} \cdot 4 \right] + \left[ \frac{(-1/3) \cdot (-66)}{EA_c} \cdot 2 \right] \quad (4.17)$$

O cálculo da parcela de energia de deformação virtual por flexão também é decomposto em um somatório de integrais computadas em cada barra:

$$\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx = \sum_{\text{barras}} \left[ \int_{\text{barra}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx \right]. \quad (4.18)$$

A integral ao longo de cada barra na Equação (4.18) é calculada com base na Tabela 4.1. O cálculo para a viga é explicado na Figura 4.10. O diagrama de momentos fletores real é desmembrado em dois triângulos e uma parábola com máximo no centro, e o diagrama de momentos fletores virtuais é desmembrado em dois triângulos. Com base na Tabela 4.1, essas parcelas são combinadas em separado para avaliar a integral. Esse exemplo ilustra a utilização da tabela de combinação de diagrama de momentos. Observa-se que os sinais da integral são positivos quando as parcelas dos diagramas tracionam fibras do mesmo lado da barra, e são negativos quando tracionam fibras opostas.

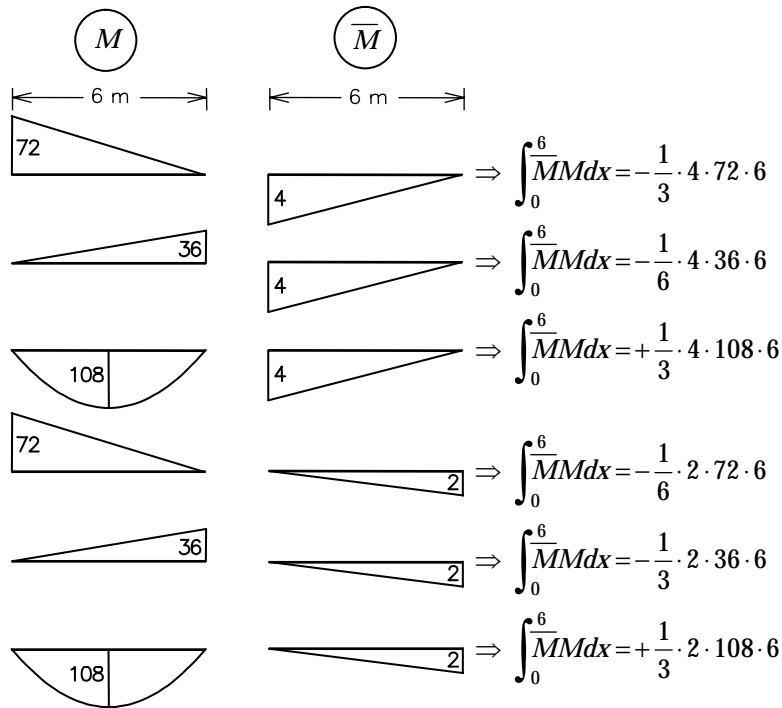


Figura 4.10 – Combinação de diagramas de momentos fletores real e virtual para a viga da estrutura da Figura 4.9.

As parcelas de contribuição para a energia de deformação virtual por flexão indicadas na Figura 4.10 são somadas às parcelas de contribuição das colunas, resultando em:

$$\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx = -\frac{1}{3EI_v} \cdot 4 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{6EI_v} \cdot 4 \cdot 36 \cdot 6 + \frac{1}{3EI_v} \cdot 4 \cdot 108 \cdot 6 - \frac{1}{6EI_v} \cdot 2 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{3EI_v} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 6 + \frac{1}{3EI_v} \cdot 2 \cdot 108 \cdot 6 - \frac{1}{3EI_c} \cdot 4 \cdot 72 \cdot 4 - \frac{1}{3EI_c} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2 \quad (4.19)$$

Com base nas Equações (4.14), (4.17) e (4.19), e nos valores dos parâmetros  $E$ ,  $A_v$ ,  $I_v$ ,  $A_c$  e  $I_c$ , o deslocamento desejado da estrutura da Figura 4.9 pode ser calculado:

$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \left[ \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx \right] = -1,40 \cdot 10^{-4} - 2,79 \cdot 10^{-2} = -2,81 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

O sinal negativo do deslocamento calculado significa que o seu sentido, da direita para a esquerda, é contrário ao sentido da carga virtual  $\bar{P}$  aplicada.

Observa-se que a contribuição da parcela de energia de deformação devida ao efeito axial ( $-1,40 \cdot 10^{-4}$  m) é muito menor em módulo do que a contribuição da parcela devida ao efeito de flexão ( $-2,79 \cdot 10^{-2}$  m). Isto é usual para pórticos que trabalham à flexão e, em geral, no cálculo manual a contribuição da energia de deformação axial é desprezada. Deve-se ressaltar que as cargas, dimensões e parâmetros de material e seções transversais adotados para esse exemplo são realistas.

#### 4.3.1.2. Deslocamentos provocados por variação de temperatura

Como visto na Seção 2.5 do Capítulo 2, variações de temperatura não provocam esforços em uma estrutura isostática. Isto porque a estrutura isostática tem o número exato de vínculos para ser estável e, portanto, sempre se ajusta a pequenas modificações no comprimento (dilatação ou encurtamento) de suas barras provocados por variações de temperatura. Em outras palavras, pode-se imaginar que uma estrutura isostática não oferece resistência para acomodar uma barra que sofreu uma pequena modificação em seu comprimento devido a uma variação de temperatura, já que a estrutura isostática sem aquela barra se configura em um mecanismo. Isto significa que a variação de temperatura provoca deslocamentos sem que apareçam esforços em uma estrutura isostática.

Entretanto, variações de temperatura em estruturas hiperestáticas provocam deformações e esforços internos na estrutura. Muitas vezes essas solicitações são de grande importância em estruturas hiperestáticas.

Os efeitos de variação de temperatura em estruturas hiperestáticas serão considerados no próximo capítulo. Esta seção mostra como se aplica o Princípio das Forças Virtuais para o cálculo de deslocamentos provocados por variação de temperatura em uma estrutura isostática.

Para se aplicar o PFV é necessário determinar os deslocamentos relativos internos devidos à variação de temperatura (real):

$du^T \rightarrow$  deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura;

$d\theta^T \rightarrow$  rotação relativa interna por flexão devido à variação de temperatura;

$dh^T \rightarrow$  deslocamento transversal relativo interno devido à variação de temperatura.

Considere inicialmente um exemplo simples de uma viga biapoiada que sofre um aquecimento uniforme de temperatura  $T$  [°C], tal como indicado na Figura 4.11. O material tem um coeficiente de dilatação térmica  $\alpha$  [/°C].

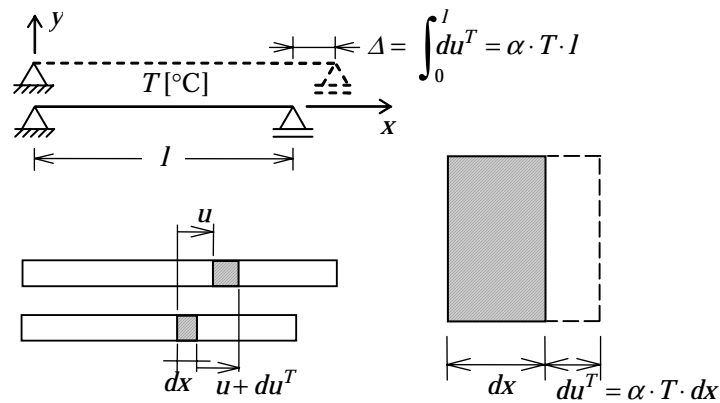


Figura 4.11 – Viga biapoiada com variação uniforme de temperatura.

Nesse caso, a variação de comprimento de um elemento infinitesimal de barra (de comprimento inicial  $dx$ ) é:

$$du^T = \alpha \cdot T \cdot dx.$$

Agora considere o caso de uma viga que sofre um aquecimento  $+T$  [°C] nas fibras inferiores e um resfriamento  $-T$  [°C] nas fibras superiores, tal como indicado na Figura 4.12. A viga tem uma seção transversal tal que o centro de gravidade (por onde passa o eixo longitudinal  $x$ ) se situa no meio da altura  $h$  da seção. Para pequenos deslocamentos, um ângulo em radianos pode ser aproximado à sua tangente. Portanto, com base na Figura 4.12, a rotação relativa interna por flexão devido a essa variação transversal de temperatura é:

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot 2T}{h} dx.$$

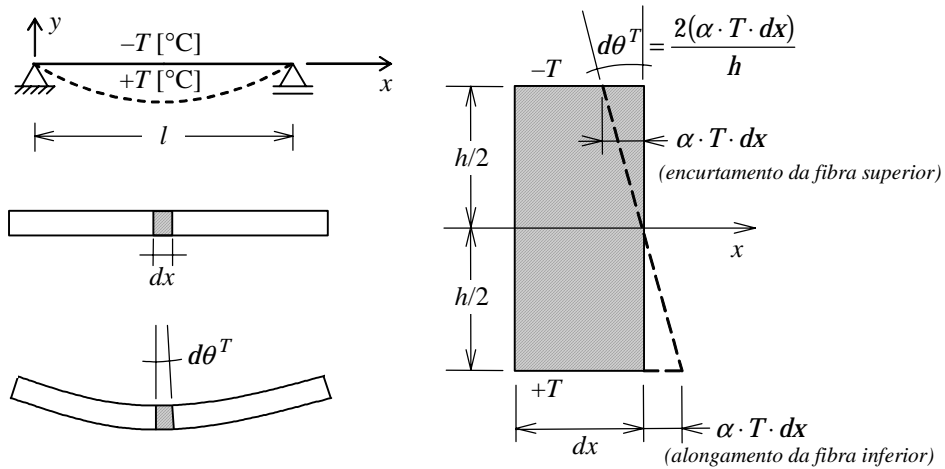


Figura 4.12 – Viga biapoiada com variação transversal de temperatura.

No caso geral, indicado na Figura 4.13, as fibras superiores e inferiores da barra sofrem variações diferentes de temperatura e o centro de gravidade se situa em uma posição qualquer ao longo da altura da seção transversal, definida pela sua distância  $\bar{y}$  em relação à base da seção. Para a definição dos deslocamentos internos devidos a uma variação genérica de temperatura, as seguintes hipóteses serão adotadas:

- Não existe deslocamento transversal relativo devido à variação de temperatura ( $dh^T = 0$ ).
- A temperatura varia linearmente ao longo da altura da seção transversal (da fibra inferior para a superior). A variação de temperatura da fibra inferior é  $T_i$  e a da fibra superior é  $T_s$ . A consequência desta hipótese é que a seção transversal da barra vai permanecer plana com a variação de temperatura (considerando um material homogêneo).
- O deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura ( $du^T$ ) corresponde ao alongamento ou encurtamento da fibra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal. A variação de temperatura nessa fibra ( $T_{CG}$ ) é obtida por interpolação linear de  $T_i$  e  $T_s$ .

Com base na Figura 4.13, os deslocamentos relativos internos para uma variação genérica de temperatura são:

$$du^T = \alpha \cdot T_{CG} \cdot dx; \quad (4.20)$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} dx. \quad (4.21)$$

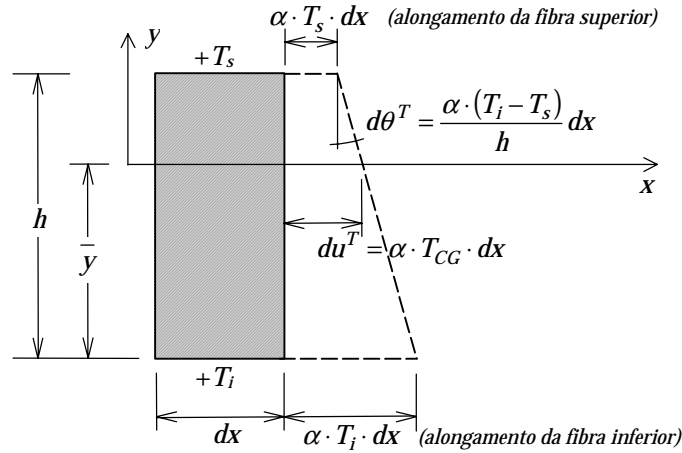


Figura 4.13 – Deformação de um elemento infinitesimal de barra por variação de temperatura.

O sinal da rotação relativa interna da Equação (4.21) depende dos valores de  $T_i$  e  $T_s$ . Conforme está indicando na Figura 4.13, quando  $T_i$  é maior que  $T_s$  (no sentido algébrico),  $d\theta^T$  tem o sentido anti-horário e é convencionada positiva. O sinal vai ser negativo quando a rotação for no sentido horário.

A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico devido a uma variação de temperatura genérica em um quadro plano é obtida substituindo as Equações (4.20) e (4.21) dos deslocamentos relativos internos reais (com  $dh^T = 0$ ) na Equação (4.12):

$$\Delta = \frac{1}{P} \left[ \int_{estrutura} \bar{N} \cdot \alpha \cdot T_{CG} \cdot dx + \int_{estrutura} \frac{\bar{M} \cdot \alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} dx \right]. \quad (4.22)$$

Sendo:

$\alpha \rightarrow$  coeficiente de dilatação térmica do material;

$h \rightarrow$  altura da seção transversal de uma barra;

$T_i \rightarrow$  variação de temperatura na fibra inferior de uma barra;

$T_s \rightarrow$  variação de temperatura na fibra superior de uma barra;

$T_{CG} \rightarrow$  variação de temperatura na fibra do centro de gravidade de uma barra.

As integrais ao longo da estrutura da Equação (4.22) são decompostas em um somatório de integrais ao longo das barras. Considerando que as barras são prismáticas e que a variação de temperatura nas fibras superiores e inferiores de cada barra é uniforme, essa equação pode ser simplificada para:

$$\Delta = \frac{1}{P} \left[ \sum_{\text{barras}} \left[ \alpha \cdot T_{CG} \cdot \int \bar{N} \cdot dx \right]_{\text{barra}} + \sum_{\text{barras}} \left[ \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} \cdot \int \bar{M} \cdot dx \right]_{\text{barra}} \right]. \quad (4.23)$$

Observa-se na Equação (4.23) que as integrais que aparecem correspondem às áreas dos diagramas de esforço normal e momento fletor do sistema virtual calculadas em cada barra.

Para exemplificar o cálculo de deslocamento pelo PFV devido a uma variação de temperatura, a mesma estrutura das Figuras 4.3 e 4.9 vai ser utilizada. Considere que a estrutura sofre um aquecimento interno de 20°C, tal como indicado na Figura 4.14, e que também se deseja calcular o deslocamento horizontal do apoio da direita. Portanto, o mesmo sistema virtual adotado na Figura 4.9 será adotado aqui. O material tem um coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 0,000012/^\circ\text{C}$ . A altura da seção transversal das colunas é  $h_c = 0,20$  m e a altura da seção transversal da viga é  $h_v = 0,30$  m. Tanto para a viga quanto para as colunas, o centro de gravidade da seção transversal se situa no meio da altura.

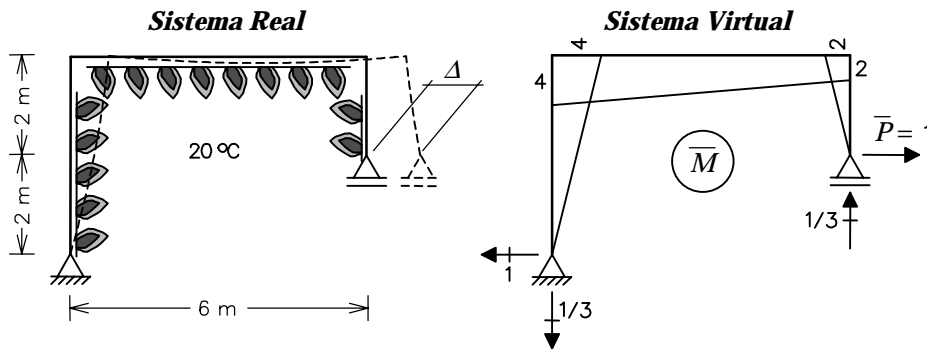


Figura 4.14 – Cálculo de deslocamento devido a uma variação de temperatura pelo PFV.

Os esforços normais virtuais nas barras do exemplo da Figura 4.14 são obtidos a partir das reações de apoio indicadas na figura, sendo que a viga tem  $\bar{N} = +1$ , a coluna da esquerda tem  $\bar{N} = +1/3$  e a coluna da direita tem  $\bar{N} = -1/3$ . A aplicação da Equação (4.23) para o cálculo do deslocamento desse exemplo resulta em:

$$\Delta = \left[ \alpha \cdot T_{CG} \cdot (+6) + \alpha \cdot T_{CG} \cdot \left( +\frac{4}{3} \right) + \alpha \cdot T_{CG} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) \right] + \left[ \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_v} \cdot (+18) + \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_c} \cdot (+8) + \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_c} \cdot (+2) \right]. \quad (4.24)$$

Adotou-se, como convenção, que os sinais dos momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras interiores do quadro, resultando em áreas positivas.

Para o cálculo do deslocamento pela Equação (4.24), as fibras interiores do quadro estão sendo consideradas como fibras inferiores das barras. Portanto,  $T_i = +20^\circ\text{C}$ ,  $T_s = 0^\circ\text{C}$  e  $T_{CG} = +10^\circ\text{C}$ . Utilizando  $h_v = 0,30$  m e  $h_c = 0,20$  m na Equação (4.24), resulta no deslocamento horizontal do apoio da direita:

$$\Delta = \left[ +0,08 \cdot 10^{-2} \right] + \left[ +2,64 \cdot 10^{-2} \right] = +2,72 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

O sinal positivo indica que o deslocamento é da esquerda para a direita, pois este foi o sentido da carga virtual aplicada.

#### 4.3.1.3. Deslocamentos provocados por recalques de apoio

Recalques de apoio, em geral, são solicitações acidentais. Entretanto, as fundações de uma estrutura podem apresentar pequenos movimentos que devem ser considerados no projeto. Como visto no Capítulo 2 (Seção 2.5), recalques de apoio, quando pequenos em relação às dimensões da estrutura, não provocam esforços em uma estrutura isostática. Isto porque a estrutura isostática tem o número exato de vínculos para ser estável e, portanto, sempre se ajusta a um pequeno movimento de apoio. Em outras palavras, pode-se imaginar que ao se movimentar um apoio a estrutura isostática perde um vínculo, transformando-se em um mecanismo (uma cadeia cinemática). Assim, a estrutura se acomoda como um corpo rígido (sem deformações) para a nova posição do apoio. Portanto, recalques de apoio provocam deslocamentos em uma estrutura isostática sem que ocorram deformações ou esforços.

Por outro lado, movimentos diferenciados de apoios de estruturas hiperestáticas provocam deformações e esforços internos na estrutura. Assim como no caso de variações de temperatura, os recalques de apoio podem provocar solicitações que são de grande importância em estruturas hiperestáticas.

Os efeitos de recalques de apoio em estruturas hiperestáticas serão considerados no próximo capítulo. Esta seção mostra como se aplica o Princípio das Forças Virtuais para o cálculo de um deslocamento provocado por um recalque de apoio de uma estrutura isostática.

O mesmo pórtico plano adotado nas seções anteriores é considerado como exemplo para o cálculo de deslocamento, tal como mostrado na Figura 4.15. No exemplo, o apoio da esquerda da estrutura sofre um recalque vertical (para baixo)  $\rho = 0,06$  m.

Observa-se através da elástica indicada (com amplitude exagerada) na Figura 4.15 que o quadro isostático sofreu um movimento de corpo rígido devido ao recalque. Isto é, as barras permanecem retas (sem deformação). Portanto, a energia de deformação interna virtual é nula:

$$\bar{U} = 0.$$



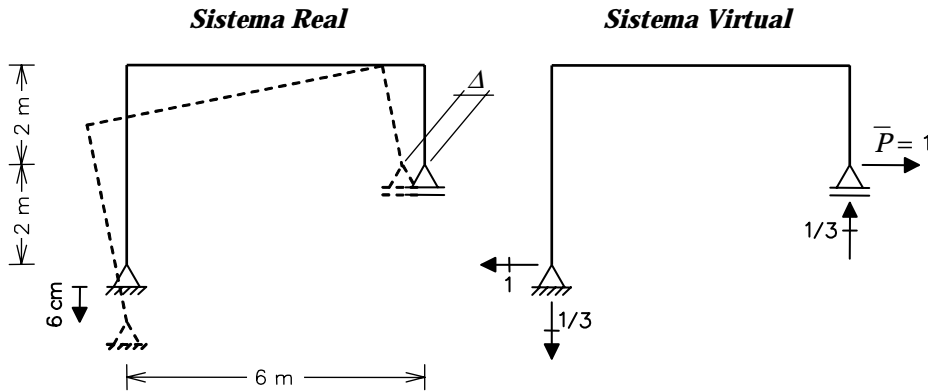


Figura 4.15 – Cálculo de deslocamento devido a um recalque de apoio pelo PFV.

Por outro lado, o trabalho virtual das forças externas agora recebe a contribuição da reação de apoio do sistema virtual com o correspondente deslocamento (recalque) de apoio real:

$$\overline{W}_E = \overline{P} \cdot \Delta + (-1/3) \cdot (-\rho).$$

Nessa expressão foi considerado que a reação vertical virtual no apoio da esquerda é negativa pois tem o sentido de cima para baixo, assim como o recalque (real) é negativo porque é para baixo.

A imposição da expressão do PFV ( $\overline{W}_E = \overline{U}$ ) resulta no valor do deslocamento desejado, no qual o sinal negativo indica que o deslocamento é da direita para a esquerda:

$$\overline{W}_E = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\overline{P}} [ -(-1/3) \cdot (-\rho) ] \rightarrow \Delta = -2,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico devido a recalques de apoio em um quadro isostático é obtida considerando que  $\overline{U} = 0$ :

$$\Delta = -\frac{1}{\overline{P}} \sum_{\text{recalques}} [\overline{R} \cdot \rho]. \quad (4.25)$$

Sendo:

$\rho$  → recalque de apoio genérico na estrutura real;

$\overline{R}$  → reação de apoio no sistema virtual correspondente ao recalque real  $\rho$ .

Os sinais das reações e recalques na Equação (4.25) devem ser consistentes.

#### 4.3.1.4. Verificação de atendimento à condição de compatibilidade

Embora os exemplos mostrados nas seções anteriores tenham tratado de estruturas isostáticas, o PFV também pode ser aplicado para estruturas hiperestáticas. Nesse caso, a estrutura do sistema virtual não necessariamente precisa ter os mesmos vínculos da estrutura real, pois a única restrição quanto ao sistema de forças virtuais é que satisfaça condições de equilíbrio. Por exemplo, considere a viga engastada e apoiada da Figura 4.16.

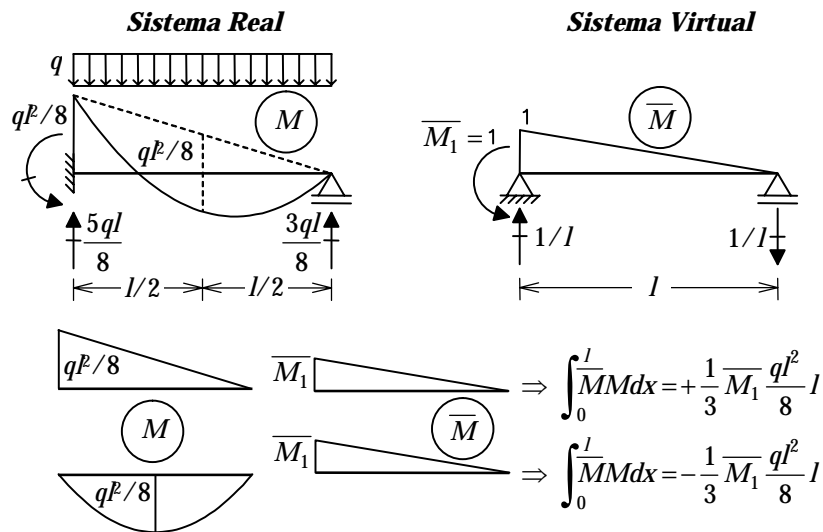


Figura 4.16 – Sistema virtual para verificação de correção de diagrama de momentos fletores de uma viga engastada e apoiada.

Na Figura 4.16, a estrutura real é hiperestática e a estrutura virtual é uma estrutura isostática obtida da estrutura real pela eliminação de um vínculo (restrição à rotação  $\theta_1$  na extremidade esquerda). Nesse caso, tendo-se disponível o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática real, o cálculo da rotação na direção do vínculo eliminado deve resultar em um valor nulo. Isto é na verdade uma verificação da correção do diagrama: *o diagrama correto é aquele que faz com que a condição de compatibilidade no vínculo liberado no sistema virtual seja satisfeita*. De fato, o cálculo da rotação  $\theta_1$  pelo PFV resulta em um valor nulo:

$$\theta_1 = \frac{1}{\bar{M}_1} \cdot \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx = +\frac{1}{3} \frac{q l^2}{8} \frac{l}{EI} - \frac{1}{3} \frac{q l^2}{8} \frac{l}{EI} = 0.$$

Nessa expressão, a integral foi avaliada conforme indica a Figura 4.16. O diagrama de momentos fletores real foi desmembrado em um triângulo e em uma parábola com máximo no centro. Com base na Tabela 4.1, essas parcelas foram combinadas

em separado com o triângulo do diagrama de momentos fletores virtual para avaliar a integral.

Deve-se tomar cuidado adicional na escolha do sistema virtual: a estrutura adotada no sistema virtual nunca deve acionar um vínculo em relação à estrutura real. Considere como exemplo a estrutura da Figura 4.17, da qual se deseja calcular o deslocamento  $D_1$  no ponto central. Note que a estrutura real é hiperestática e a estrutura virtual é isostática. Entretanto, a estrutura virtual tem um vínculo adicional na extremidade direita (engaste) que não existe na estrutura real.

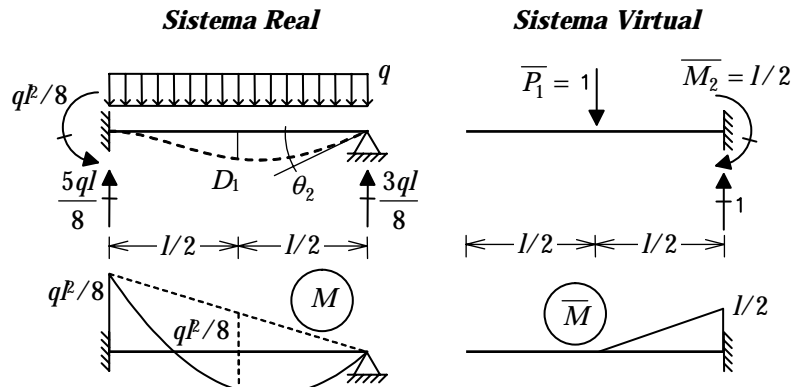


Figura 4.17 – Sistema virtual com vínculo adicional em relação à estrutura real.

O problema com a escolha do sistema virtual da Figura 4.17 é que no trabalho externo virtual total deve ser computado o trabalho realizado pela reação de apoio momento virtual  $\overline{M}_2$  com a correspondente rotação real  $\theta_2$  na extremidade direita. Isto impede a determinação do deslocamento  $D_1$  pois na expressão do PFV aparecem duas incógnitas,  $D_1$  e  $\theta_2$ :

$$\overline{W}_E = \overline{U} \rightarrow \overline{P}_1 \cdot D_1 - \overline{M}_2 \cdot \theta_2 = \int_0^l \frac{\overline{M}M}{EI} dx.$$

Note nessa expressão que o trabalho da reação momento virtual  $\overline{M}_2$  realizado com a rotação real  $\theta_2$  é negativo pois essas entidades têm sentidos opostos (horário e anti-horário, respectivamente).

### 4.3.2. Princípio dos deslocamentos virtuais

Em algumas situações na análise de estruturas é necessário impor condições de equilíbrio a um sistema de forças. Por exemplo, as soluções fundamentais do Método dos Deslocamentos correspondem à determinação de valores de forças e momentos que equilibram uma estrutura que tem uma configuração deformada compatível imposta, tal como apresentado na Seção 2.3.2 do Capítulo 2.

O *Princípio dos Deslocamentos Virtuais* (PDV) é uma das principais ferramentas para a determinação de forças (e momentos) necessárias para impor uma determinada configuração deformada a uma estrutura. Esse princípio diz que:

- Dado um sistema de forças real ( $F, f$ ) e uma configuração deformada ( $\bar{D}, \bar{d}$ ) arbitrária (virtual) compatível, a igualdade  $\bar{W}_E = \bar{U}$  estabelece uma condição de equilíbrio para o sistema de forças real.

Sendo que:

$\bar{W}_E = \sum F \cdot \bar{D} \rightarrow$  trabalho das forças externas reais  $F$  com os correspondentes deslocamentos externos virtuais  $\bar{D}$ ;

$\bar{U} = \int f \cdot \bar{d} \rightarrow$  energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos reais  $f$  com os correspondentes deslocamentos relativos internos virtuais  $\bar{d}$ .

Assim como o PFV, o PDV utiliza um sistema auxiliar virtual, que é completamente independente do sistema real, sendo este a estrutura da qual se quer estabelecer uma condição de equilíbrio. O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com uma configuração deformada ( $\bar{D}, \bar{d}$ ) escolhida arbitrariamente de tal maneira que uma única força (ou momento) desconhecida (a que se deseja calcular) produza trabalho externo. A configuração deformada do sistema virtual não existe na realidade (por isso, é dita *virtual*) e é uma mera abstração para cálculo.

Considere a viga biapoiada mostrada na Figura 4.18 com uma carga concentrada  $P_1$  com posição definida por uma distância  $a$  ao apoio da esquerda (sistema real). Deseja-se determinar o valor da reação vertical  $V_A$  no apoio da esquerda. O sistema virtual é definido arbitrariamente com um campo de deslocamentos externos virtuais  $\bar{D}$  tal que a outra reação de apoio desconhecida  $V_B$  não produza trabalho externo.

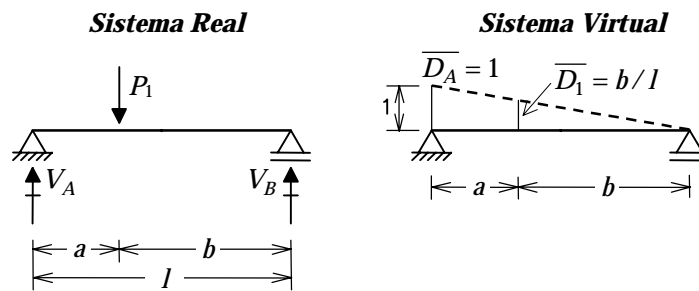


Figura 4.18 – Cálculo de reação de apoio de uma viga biapoiada pelo PDV.

Observa-se na Figura 4.18 que o campo de deslocamentos externos virtuais não precisa satisfazer as condições de compatibilidade (externas ou internas) da estrutura real. Como dito, a única restrição quanto à configuração deformada virtual é

que os deslocamentos externos virtuais sejam compatíveis com deslocamentos relativos (ou deformações) internos virtuais. Nesse exemplo, foi imposto um campo de deslocamentos virtuais de corpo rígido, isto é, sem deformação interna ( $\bar{U} = 0$ ).

Pela Figura 4.18, o valor do deslocamento virtual  $\bar{D}_1$ , que corresponde à carga externa real  $P_1$ , é obtido por semelhança de triângulos. Portanto o valor da reação  $V_A$  sai diretamente da imposição de  $\bar{W}_E = \bar{U}$ :

$$V_A \cdot \bar{D}_A - P_1 \cdot \bar{D}_1 = 0 \Rightarrow V_A = \frac{P_1 b}{l}$$

O PDV também pode ser utilizado para determinar um esforço interno em uma estrutura. Para tanto, é necessário escolher uma configuração deformada virtual que isole na equação  $\bar{W}_E = \bar{U}$  o esforço que se quer calcular. Considere, por exemplo, que se deseja determinar o esforço cortante na seção  $S$  de uma viga apoiada, tal como mostrado na Figura 4.19. A viga está submetida a uma carga concentrada  $P_1$  definida por uma distância  $a$  ao apoio da esquerda, e a seção  $S$  é definida pela ordenada  $x$  ao início da viga, sendo que  $a > x$ .

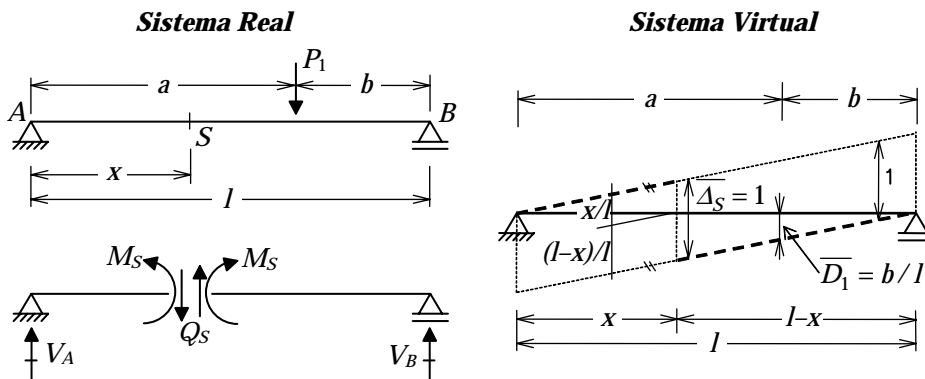


Figura 4.19 – Cálculo de esforço cortante de uma viga biapoiada pelo PDV.

A configuração deformada virtual do exemplo da Figura 4.19 foi definida de tal forma que não existe deformação no interior da viga, com exceção do ponto correspondente à seção  $S$ , onde existe um deslocamento transversal relativo interno virtual  $\bar{\Delta}_S = 1$  concentrado. Isto é, foi imposta uma descontinuidade transversal unitária na posição da seção  $S$ . Deve-se observar que não existe rotação relativa entre os trechos da elástica virtual antes e depois da seção  $S$ . Este campo de deslocamentos virtual foi escolhido de tal forma que somente o esforço cortante  $Q_S$  na seção  $S$  produza energia de deformação virtual interna ( $M_S$  não provoca energia de deformação pois não existe rotação relativa):

$$\bar{U} = Q_S \cdot \bar{\Delta}_S$$

Por outro lado, somente a força externa real  $P_1$  provoca trabalho externo. As outras forças externas, as reações de apoio  $V_A$  e  $V_B$ , têm correspondentes deslocamentos virtuais nulos. Portanto:

$$\overline{W}_E = P_1 \cdot \overline{D}_1,$$

sendo que  $\overline{D}_1$  está indicado na Figura 4.19. Com base na expressão  $\overline{W}_E = \overline{U}$ , chega-se ao valor do esforço cortante desejado:

$$Q_S = + \frac{P_1 b}{l}.$$

É óbvio que, nesse exemplo, a aplicação do equilíbrio diretamente é uma forma muito mais simples para se determinar o valor do esforço cortante em  $S$ . O que se pretendeu mostrar com esse exemplo é que o PDV é uma maneira alternativa para se impor condições de equilíbrio, que em alguns casos pode ser muito mais adequada. Deve-se observar também que o valor do esforço cortante  $Q_S$  foi obtido diretamente pelo PDV, sem que se tivesse calculado as reações de apoio da viga. Isso evidencia a elegância desse princípio como ferramenta matemática para imposição de equilíbrio.

De maneira análoga, o momento fletor na seção  $S$  desse exemplo também pode ser determinado diretamente pelo PDV. A Figura 4.20 mostra a configuração deformada virtual que é utilizada para determinar  $M_S$ .

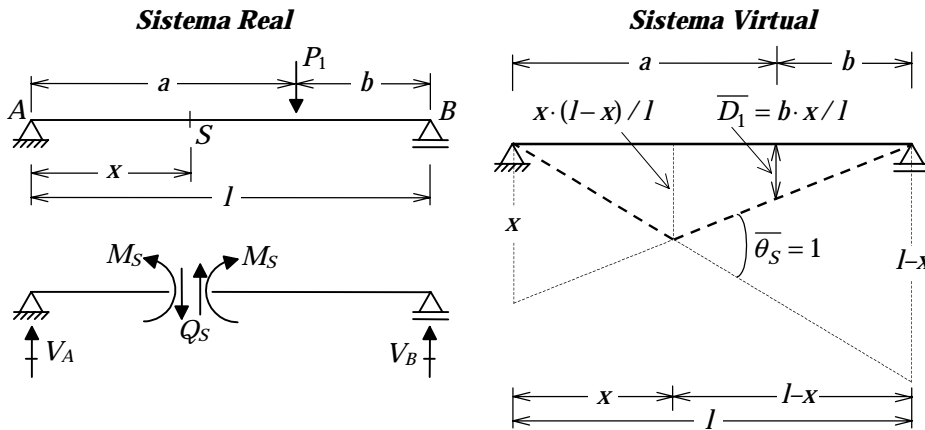


Figura 4.20 – Cálculo de momento fletor de uma viga biapoiada pelo PDV.

A elástica virtual do exemplo da Figura 4.20 é composta de trechos retos com uma rotação relativa interna  $\overline{\theta}_S = 1$  concentrada na posição da seção  $S$  (considerando pequenos deslocamentos de tal forma que o arco de um círculo é aproximado por sua corda). Nesse caso, não existe deslocamento transversal relativo virtual e, portanto, somente  $M_S$  produz energia de deformação interna virtual:

$$\bar{U} = M_S \cdot \bar{\theta}_S.$$

A partir da imposição de  $\bar{W}_E = \bar{U}$ , sendo  $\bar{W}_E = P_1 \cdot \bar{D}_1$  e  $\bar{D}_1 = b \cdot x / l$  (veja a Figura 4.20), chega-se a:

$$M_S = + \frac{P_1 \cdot b \cdot x}{l}.$$

Os exemplos de aplicação do PDV mostrados acima trataram somente de vigas isostáticas. Além disso, os campos de deslocamentos virtuais impostos corresponderam a trechos retos de movimentos de corpo rígido. Isto foi feito apenas com o objetivo de apresentar o princípio, haja vista que a imposição de condições de equilíbrio em estruturas isostáticas é relativamente simples. Na verdade, a grande vantagem do PDV é a determinação de forças ou momentos que equilibram uma estrutura qualquer (isostática ou hiperestática) que tenha uma configuração deformada conhecida (não rígida no caso geral).

A expressão geral do PDV para o cálculo de uma força externa genérica atuando em um ponto de um pórtico plano para manter o seu equilíbrio é obtida das Equações (4.10) e (4.11), desprezando a energia de deformação por efeito cortante:

$$\bar{W}_E = \bar{U} \Rightarrow P = \frac{1}{\Delta} \left[ \int_{\text{estrutura}} N \cdot \bar{d}u + \int_{\text{estrutura}} M \cdot \bar{d}\theta \right]. \quad (4.26)$$

Sendo:

$P \rightarrow$  força externa genérica a ser calculada no sistema real;

$N \rightarrow$  esforço normal no sistema real;

$M \rightarrow$  momento fletor no sistema real;

$\Delta \rightarrow$  deslocamento externo virtual no ponto da força genérica a ser calculada;

$\bar{d}u \rightarrow$  deslocamento axial relativo interno no sistema virtual;

$\bar{d}\theta \rightarrow$  rotação relativa interna por flexão no sistema virtual.

No caso de uma grelha (estrutura plana com cargas fora do plano), o efeito de torção também deve ser considerado, resultando na seguinte expressão para o cálculo de uma força externa genérica pelo PDV, também desprezando a energia de deformação por efeito cortante:

$$\bar{W}_E = \bar{U} \Rightarrow P = \frac{1}{\Delta} \left[ \int_{\text{estrutura}} M \cdot \bar{d}\theta + \int_{\text{estrutura}} T \cdot \bar{d}\varphi \right]. \quad (4.27)$$

Sendo:

$T \rightarrow$  momento torçor no sistema real;

$\bar{d}\varphi \rightarrow$  rotação relativa interna por torção no sistema virtual.

#### 4.3.2.1. PDV para solicitações de carregamentos externos e recalques de apoio

Esta seção deduz a expressão do PDV para o cálculo genérico de forças ou momentos que equilibram uma estrutura qualquer (isostática ou hiperestática) cujas solicitações externas reais são carregamentos externos ou recalques de apoio. Essas solicitações se caracterizam por não apresentarem deformações iniciais.

Para a aplicação do princípio para esses tipos de solicitação, é necessário escrever as Equações (4.26) e (4.27) em função do campo de deslocamentos externos reais e virtuais. Para tanto, é obtida com base na Equação (3.15) uma relação entre o esforço normal  $N$  e o deslocamento axial  $u$ :

$$N = EA \frac{du}{dx}. \quad (4.28)$$

A relação entre o momento fletor  $M$  e o deslocamento transversal  $v$  é obtida com base na Equação (3.20):

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (4.29)$$

A relação entre o momento torçor  $T$  e a rotação por torção  $\varphi$  é obtida da Equação (3.19):

$$T = GJ_t \frac{d\varphi}{dx}. \quad (4.30)$$

Substituindo as Equações (4.28) e (4.29) na Equação (4.26), e considerando pela Equação (3.1) que  $\bar{d}\theta / dx = d^2 \bar{v} / dx^2$ , tem-se a expressão do PDV para quadros planos em função dos deslocamentos:

$$P = \frac{1}{\Delta} \left[ \int_{estrutura} EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int_{estrutura} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} dx \right]. \quad (4.31)$$

Sendo:

$EA \rightarrow$  parâmetro de rigidez axial, sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $A$  a área da seção transversal;

$u(x) \rightarrow$  deslocamento axial no sistema real;



$\overline{u(x)}$  → deslocamento axial no sistema virtual;

$EI$  → parâmetro de rigidez transversal por flexão, sendo  $I$  o momento de inércia da seção transversal;

$v(x)$  → deslocamento transversal no sistema real;

$\overline{v(x)}$  → deslocamento transversal no sistema virtual.

No caso de grelhas, a expressão do PDV em função de deslocamentos transversais e rotações por torção externos é obtida substituindo as Equações (4.29) e (4.30) na Equação (4.27):

$$P = \frac{1}{\Delta} \left[ \int_{\text{estrutura}} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \overline{v}}{dx^2} dx + \int_{\text{estrutura}} GJ_t \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\overline{\varphi}}{dx} dx \right]. \quad (4.32)$$

Sendo:

$GJ_t$  → parâmetro de rigidez à torção, sendo  $G$  o módulo de cisalhamento do material e  $J_t$  o momento de inércia à torção da seção transversal;

$\varphi(x)$  → rotação por torção no sistema real;

$\overline{\varphi(x)}$  → rotação por torção no sistema virtual.

As Seções 4.4.2 e 4.4.3 mostram aplicações das Equações (4.31) e (4.32) do PDV para o cálculo de forças e momentos em barras cinematicamente determinadas, isto é, em barras das quais se conhece a configuração deformada. Estas são soluções fundamentais que formam base para o Método dos Deslocamentos, tal como vai ser visto no Capítulo 6.

#### 4.3.2.2. PDV para solicitações de variação de temperatura

A variação de temperatura é um tipo de solicitação externa que se caracteriza por provocar deformações iniciais. No caso de estruturas isostáticas, as deformações provocadas por temperatura não sofrem qualquer tipo de restrição, não provocando, portanto, esforços internos na estrutura. Por outro lado, uma estrutura hiperestática pode ter tensões internas induzidas por variação de temperatura.

A aplicação do PDV para esse tipo de solicitação vai ser deduzida para o caso de pórticos planos. Nesse caso, o deslocamento axial relativo interno e a rotação relativa interna por flexão devem considerar um termo devido ao esforço interno (que pode ser provocado conjuntamente por carregamento externo e recalques de apoio) e um termo devido à variação de temperatura:

$$du = \frac{N}{EA} dx + du^T; \quad (4.33)$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx + d\theta^T. \quad (4.34)$$

Sendo que  $du^T$  e  $d\theta^T$  são dados pelas Equações (4.20) e (4.21), respectivamente.

Para aplicar a Equação (4.26) do PDV, é necessário escrever o esforço normal  $N$  e o momento fletor  $M$  considerando as deformações iniciais provocadas pela variação de temperatura. Isto é feito com base nas Equações (4.33) e (4.34):

$$N = EA \left( \frac{du}{dx} - \frac{du^T}{dx} \right); \quad (4.35)$$

$$M = EI \left( \frac{d\theta}{dx} - \frac{d\theta^T}{dx} \right). \quad (4.36)$$

Substituindo os esforços internos reais dados pelas Equações (4.35) e (4.36) na Equação (4.26), resulta na expressão do PDV para estruturas hiperestáticas com solicitações reais de carregamento externo, recalques e variação de temperatura:

$$P = \frac{1}{\Delta} \left[ \int_{\text{estrutura}} \left[ EA \left( \frac{du}{dx} - \frac{du^T}{dx} \right) \right] \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int_{\text{estrutura}} \left[ EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta^T}{dx} \right) \right] \cdot \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} dx \right]. \quad (4.37)$$

### 4.3.3. Teoremas de reciprocidade

O PTV pode ser utilizado para formular dois teoremas que são muito úteis na análise de estruturas elásticas lineares. Estes são os chamados teoremas de reciprocidade (Tauchert 1974): o Teorema de Maxwell e a sua versão generalizada, o Teorema de Betti (White *et al.* 1976).

Considere duas soluções estruturais completas  $A$  e  $B$  que atuam sobre a mesma estrutura elástica e linear (as soluções são ditas completas porque cada uma delas satisfaz todas as condições de equilíbrio e compatibilidade). O sistema  $A$  é composto de um sistema de forças ( $F_A, f_A$ ) em equilíbrio e associado a uma configuração deformada ( $D_A, d_A$ ) compatível. No sistema  $A$ ,  $F_A$  são as forças externas atuando sobre a estrutura,  $f_A$  são esforços internos em equilíbrio com  $F_A$ ,  $D_A$  é o campo de deslocamentos externos da estrutura e  $d_A$  são deslocamentos relativos internos compatíveis com  $D_A$ . Analogamente, o sistema  $B$  é composto de um sistema de forças ( $F_B, f_B$ ) em equilíbrio e associado a uma configuração deformada ( $D_B, d_B$ ) compatível.

O PTV pode ser aplicado a esses dois sistemas de duas formas, uma considerando o sistema  $A$  como real e o sistema  $B$  como virtual e a outra ao contrário. Utilizando a Equação (4.10) pode-se escrever as seguintes relações:

$$\sum F_A \cdot D_B = \int f_A \cdot d_B ; \tag{4.38}$$

$$\sum F_B \cdot D_A = \int f_B \cdot d_A . \tag{4.39}$$

Considere que a estrutura é um quadro plano que tem um comportamento linear elástico. Nesse caso, a integral do lado direito do sinal de igual das Equações (4.38) e (4.39) são iguais:

$$\int f_A \cdot d_B = \int f_B \cdot d_A = \int \frac{N_A N_B}{EA} dx + \int \frac{M_A M_B}{EI} dx + \int \chi \frac{Q_A Q_B}{GA} dx .$$

Dessa forma, pode-se enunciar o *Teorema de Betti* (Tauchert 1974, White *et al.* 1976):

- Se uma estrutura linear elástica é submetida a dois sistemas independentes de forças, o trabalho realizado pelas forças generalizadas do primeiro sistema com os correspondentes deslocamentos generalizados do segundo sistema é igual ao trabalho realizado pelas forças generalizadas do segundo sistema com os correspondentes deslocamentos generalizados do primeiro sistema:

$$\sum F_A \cdot D_B = \sum F_B \cdot D_A . \tag{4.40}$$

As forças são ditas generalizadas pois podem envolver cargas concentradas, cargas distribuídas e momentos aplicados. Os deslocamentos são ditos generalizados pois podem envolver deslocamentos e rotações.

Um caso particular do Teorema de Betti, chamado de *Teorema de Maxwell*, ocorre quando as soluções completas independentes são constituídas de forças generalizadas unitárias isoladas, tal como as mostradas na Figura 4.21.

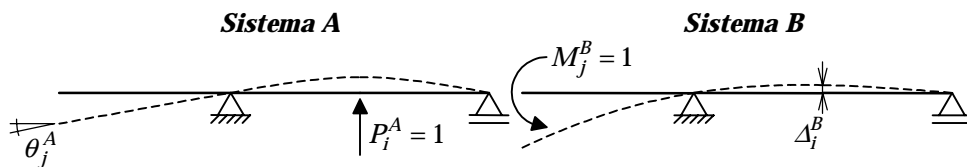


Figura 4.21 – Teorema de Maxwell para forças generalizadas unitárias.

O Teorema de Maxwell, na versão para forças generalizadas unitárias aplicadas, pode ser enunciado da seguinte maneira:

- Em uma estrutura linear elástica, o deslocamento generalizado no ponto  $j$  provocado por uma força generalizada unitária atuando no ponto  $i$  é igual ao deslocamento generalizado no ponto  $i$  provocado por uma força generalizada unitária atuando no ponto  $j$  (veja a Figura 4.21):

$$\theta_j^A = \Delta_i^B . \tag{4.41}$$

Alternativamente, as soluções podem ser constituídas de imposições de deslocamentos generalizados unitários, tal como indica a Figura 4.22.

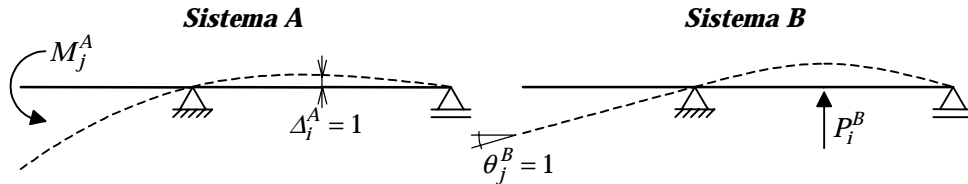


Figura 4.22 – Teorema de Maxwell para deslocamentos generalizados unitários.

O Teorema de Maxwell, na versão para deslocamentos generalizados unitários impostos, pode ser enunciado da seguinte maneira:

- Em uma estrutura linear elástica, a força generalizada que atua no ponto  $j$  necessária para provocar um deslocamento generalizado unitário no ponto  $i$  é igual à força generalizada que atua no ponto  $i$  necessária para provocar um deslocamento generalizado unitário no ponto  $j$  (veja a Figura 4.22):

$$M_j^A = P_i^B. \quad (4.42)$$

A primeira versão do Teorema de Maxwell vai ser utilizada no próximo capítulo para demonstrar a simetria da matriz de flexibilidade, que é a matriz dos coeficientes de flexibilidade do sistema de equações finais de compatibilidade do Método das Forças.

A segunda versão do Teorema de Maxwell será utilizada na próxima seção e no Capítulo 6 para demonstrar a simetria da matriz de rigidez, que é a matriz dos coeficientes de rigidez do sistema de equações finais de equilíbrio do Método dos Deslocamentos.

#### 4.4. Soluções fundamentais para barras isoladas

A metodologia de cálculo do Método dos Deslocamentos, conforme introduzido na Seção 2.3.2 do Capítulo 2, faz uma superposição de soluções cinematicamente determinadas. Essas soluções são configurações deformadas elementares da estrutura sendo analisada. Dentro dessa metodologia, conforme vai ser visto no Capítulo 6, uma configuração deformada elementar isola um determinado efeito ou parâmetro que representa o comportamento cinemático (deformado) da estrutura. Cada configuração deformada elementar é uma solução fundamental no contexto do Método dos Deslocamentos. Nesse contexto, uma solução fundamental de uma estrutura reticulada é composta de configurações deformadas elementares das suas barras. Esta seção apresenta soluções fundamentais de barras isoladas que compõem as soluções fundamentais do Método dos Deslocamentos.

Existem dois tipos de soluções fundamentais de barras isoladas para o Método dos Deslocamentos. O primeiro corresponde a soluções de uma barra quando são impostos, isoladamente, deslocamentos ou rotações nas suas extremidades. Essas soluções se constituem nas forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra para equilibrá-la quando um deslocamento (ou rotação) é imposto em uma das suas extremidades, além da elástica resultante. O segundo tipo são soluções de engastamento perfeito de barras devido a solicitações externas. Essas soluções são a elástica e as reações de apoio para uma barra com as extremidades engastadas (deslocamentos e rotações restritos nas extremidades) resultantes da aplicação de uma solicitação externa no interior da barra.

#### 4.4.1. Funções de forma para configurações deformadas elementares de barras de pórticos planos

As configurações deformadas elementares de uma barra isolada correspondem às elásticas que resultam da imposição individual de deslocamentos ou rotações em uma de suas extremidades. Os deslocamentos são impostos em direções paralelas aos eixos locais de uma barra, sendo que o eixo  $x$  tem a direção axial da barra e o eixo  $y$  tem a direção transversal, tal como mostra a Figura 4.23.

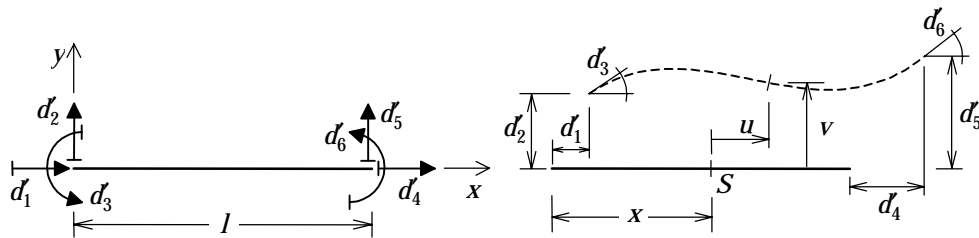


Figura 4.23 – Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de pórtico plano isolada.

A Figura 4.23 indica os deslocamentos e rotações nas extremidades de uma barra de pórtico plano isolada nas direções dos eixos locais da barra. Esses deslocamentos e rotações são chamados de *deslocabilidades*:

$d_i \rightarrow$  *deslocabilidade de barra no sistema local*: deslocamento ou rotação em uma extremidade de uma barra isolada, na direção de um dos eixos locais.

Sendo que  $d_1$  e  $d_4$  são os deslocamentos na direção axial,  $d_2$  e  $d_5$  são os deslocamentos na direção transversal, e  $d_3$  e  $d_6$  são as rotações.

A Figura 4.23 também introduz uma notação para indicar deslocamentos e rotações: *uma seta com um traço transversal na base*. Na figura as deslocabilidades também estão indicadas com seu significado físico na configuração deformada (com amplitude exagerada). Todas as deslocabilidades estão mostradas com seus senti-

dos positivos. Os deslocamentos são positivos nos sentidos dos eixos locais da barra e as rotações são positivas no sentido anti-horário.

Uma elástica elementar da barra de pórtico plano isolada é definida no sistema de eixos locais pelo deslocamento axial  $u(x)$  e pelo deslocamento transversal  $v(x)$ , que estão indicados na Figura 4.23. Conforme foi comentado na Seção 3.1 do Capítulo 3, devido à adoção da hipótese de pequenos deslocamentos, o comportamento axial e o comportamento transversal de uma barra são considerados independentes. Dessa forma, o deslocamento axial  $u(x)$  só depende das deslocabilidades axiais  $d_1$  e  $d_4$ , e o deslocamento transversal  $v(x)$  fica definido somente pelas deslocabilidades  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_5$  e  $d_6$ .

Considerando que não existe carregamento na direção axial no interior da barra, com base na Equação (3.7) tem-se que o esforço normal  $N$  na barra é constante. Portanto, a partir da Equação (4.28), vê-se que o deslocamento axial  $u(x)$  varia linearmente ao longo da barra:

$$u(x) = B_1 x + B_0. \quad (4.43)$$

Por outro lado, o deslocamento transversal  $v(x)$  da barra é regido pela Equação (3.22) de Navier. Como não existe carregamento transversal neste caso, o deslocamento transversal tem uma variação cúbica ao longo da barra:

$$v(x) = C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0. \quad (4.44)$$

As Equações (4.43) e (4.44) descrevem uma elástica genérica de uma barra isolada. Essa elástica pode ser descrita de uma maneira alternativa em função diretamente das deslocabilidades:

$$u(x) = N_1(x) \cdot d_1 + N_4(x) \cdot d_4; \quad (4.45)$$

$$v(x) = N_2(x) \cdot d_2 + N_3(x) \cdot d_3 + N_5(x) \cdot d_5 + N_6(x) \cdot d_6. \quad (4.46)$$

As funções  $N_i(x)$ , chamadas de *funções de forma*, definem as elásticas elementares da barra isolada.

Essencialmente, as Equações (4.43) e (4.45) são equivalentes. A diferença é que os parâmetros que definem a elástica axial da primeira equação são meros coeficientes de um polinômio linear, enquanto os parâmetros na segunda equação têm um significado físico: são as deslocabilidades axiais. Analogamente, as Equações (4.44) e (4.46) são equivalentes, mas na última os parâmetros que definem a elástica transversal são deslocabilidades que têm significado físico.

Existe uma função de forma da barra isolada associada a cada uma de suas deslocabilidades. No caso das deslocabilidades axiais, as equações que definem as funções de forma são obtidas a partir da Equação (4.43), determinando os valores das constantes  $B_0$  e  $B_1$  com base em condições de contorno adequadas. A função de

forma  $N_1(x)$  é definida considerando  $u(0) = 1$  e  $u(l) = 0$  na Equação (4.43), e a função de forma  $N_4(x)$  é definida considerando  $u(0) = 0$  e  $u(l) = 1$ . Isso resulta nas funções abaixo, que também estão mostradas na Figura 4.24:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}; \quad (4.47)$$

$$N_4(x) = \frac{x}{l}. \quad (4.48)$$

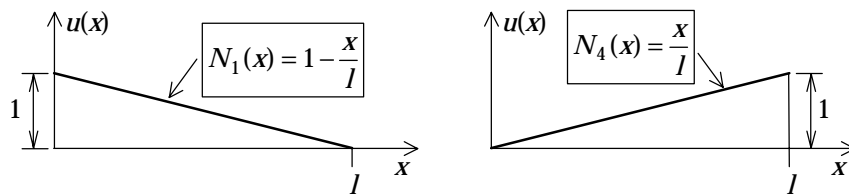


Figura 4.24 – Funções de forma axiais de uma barra isolada.

De forma análoga, para as deslocabilidades transversais, as equações que definem as funções de forma são obtidas a partir da Equação (4.44), determinando os valores das constantes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  com base em condições de contorno adequadas. A função de forma  $N_2(x)$  é definida considerando  $v(0) = 1$ ,  $dv(0)/dx = 0$ ,  $v(l) = 0$  e  $dv(l)/dx = 0$ ; a função de forma  $N_3(x)$  é definida considerando  $v(0) = 0$ ,  $dv(0)/dx = 1$ ,  $v(l) = 0$  e  $dv(l)/dx = 0$ ; a função de forma  $N_5(x)$  é definida considerando  $v(0) = 0$ ,  $dv(0)/dx = 0$ ,  $v(l) = 1$  e  $dv(l)/dx = 0$ ; e a função de forma  $N_6(x)$  é definida considerando  $v(0) = 0$ ,  $dv(0)/dx = 0$ ,  $v(l) = 0$  e  $dv(l)/dx = 1$ . Isso resulta nas funções abaixo, que também estão mostradas na Figura 4.25:

$$N_2(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}; \quad (4.49)$$

$$N_3(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + 3\frac{x^3}{l^2}; \quad (4.50)$$

$$N_5(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}; \quad (4.51)$$

$$N_6(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \quad (4.52)$$

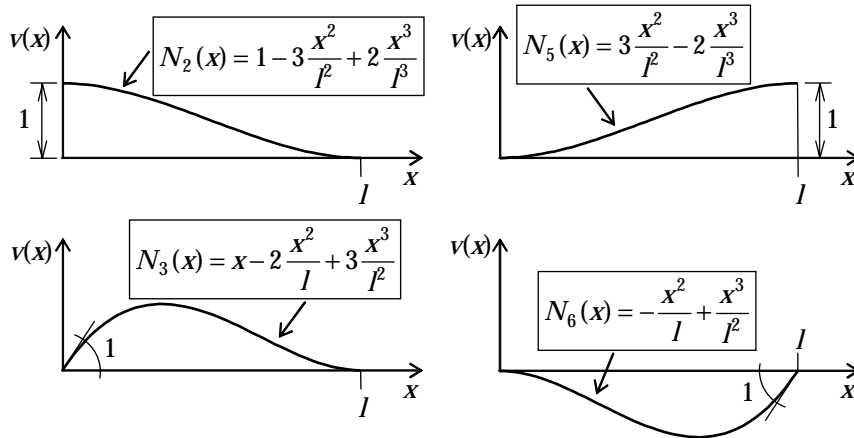


Figura 4.25 – Funções de forma transversais (de flexão) de uma barra isolada.

#### 4.4.2. Coeficientes de rigidez de barra de pórtico plano

As mais importantes soluções fundamentais de barra isolada são os chamados *coeficientes de rigidez de barra*. No presente contexto, coeficientes de rigidez de barra são forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra isolada, paralelamente aos seus eixos locais, para equilibrá-la quando um deslocamento (ou rotação) é imposto, isoladamente, em uma das suas extremidades. As funções de forma mostradas na seção anterior definem elásticas correspondentes a essas soluções fundamentais para uma barra de quadro plano. A seguinte notação é utilizada:

$k'_{ij}$  → *coeficiente de rigidez de barra no sistema local*: força ou momento que deve atuar em uma extremidade de uma barra isolada, na direção da deslocabilidade  $d'_j$ , para equilibrá-la quando a deslocabilidade  $d'_j = 1$  é imposta (com valor unitário), isoladamente, em uma das suas extremidades.

O significado físico dos coeficientes de rigidez de barra de pórtico plano no sistema local é mostrado na Figura 4.26. Essa figura indica, no seu topo, a configuração deformada de uma barra isolada e o conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la nessa configuração. Essas forças e momentos são definidos como:

$f'_i$  → *força generalizada de barra no sistema local*: força ou momento que atua na direção da deslocabilidade  $d'_i$  de uma barra para equilibrá-la quando isolada.

Como indica a Figura 4.26, a configuração deformada de uma barra pode ser decomposta em configurações deformadas elementares baseadas nas funções de forma definidas na seção anterior. A partir dessa superposição, as forças generalizadas da barra são obtidas pela soma das forças e momentos que equilibram a barra para cada uma das configurações deformadas elementares.



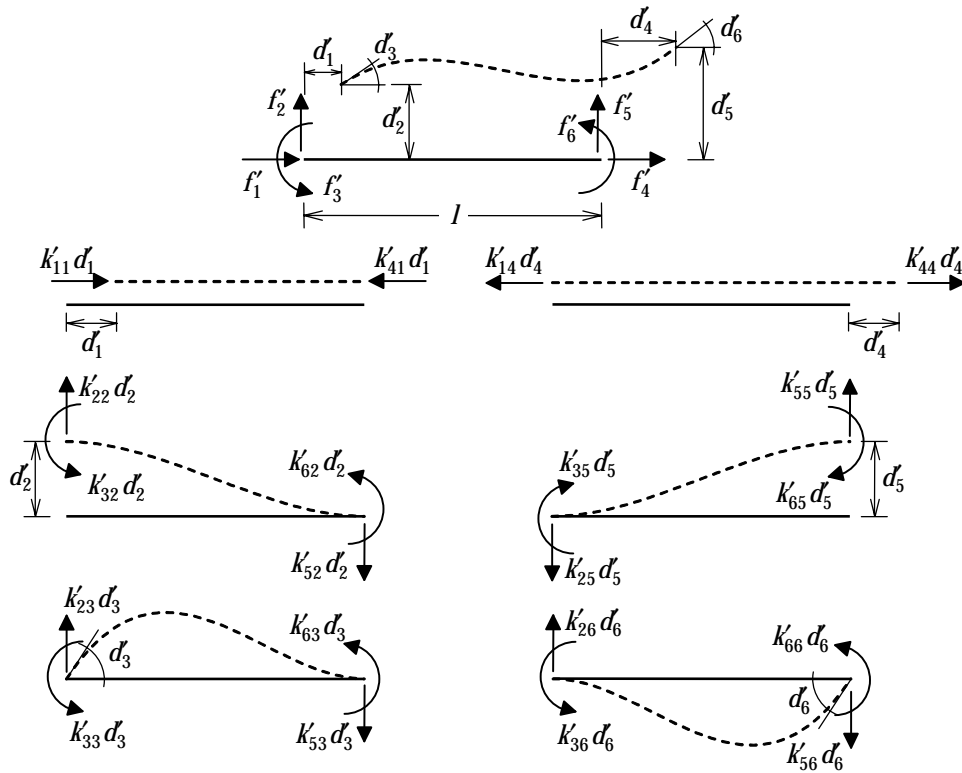


Figura 4.26 – Superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano isolada.

Observa-se na Figura 4.26 o desacoplamento entre os efeitos axiais e transversais de flexão de uma barra. As deformadas elementares axiais devidas a  $d_1$  e  $d_4$  não mobilizam os coeficientes de rigidez de flexão (forças na direção transversal ou momentos). Da mesma forma, as deformadas elementares transversais de flexão devidas a  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_5$  e  $d_6$  não mobilizam coeficientes de rigidez axiais. Devido a esse desacoplamento, alguns coeficientes de rigidez locais são nulos.

A superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 4.26 resulta em uma relação entre cada força nodal generalizada  $f'_i$  e as deslocabilidades da barra. Por exemplo, a força total  $f'_1$  é obtida pela soma das forças axiais na extremidade esquerda da barra, resultando em:  $f'_1 = k'_{11} d_1 + k'_{14} d_4$ . Analogamente, a força total  $f'_2$  é obtida pela soma das forças transversais na extremidade esquerda da barra, resultando em:  $f'_2 = k'_{22} d_2 + k'_{23} d_3 + k'_{25} d_5 + k'_{26} d_6$ . Generalizando para todas as forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, pode-se escrever a seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 & k'_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & k'_{32} & k'_{33} & 0 & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & 0 & 0 & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{52} & k'_{53} & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & k'_{62} & k'_{63} & 0 & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

A Equação (4.53) também pode ser escrita de uma forma condensada:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\}. \quad (4.54)$$

Sendo:

$\{f'\}$  → *vetor das forças generalizadas de barra no sistema local*: conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades de uma barra (nas direções dos eixos locais) para equilibrá-la quando isolada.

$[k']$  → *matriz de rigidez de uma barra no sistema local*: matriz dos coeficientes de rigidez locais  $k'_{ij}$  nas direções dos eixos locais.

$\{d'\}$  → *vetor das deslocabilidades de barra no sistema local*: conjunto de deslocabilidades de uma barra nas direções dos eixos locais.

Duas observações podem ser feitas quanto à matriz de rigidez da barra isolada. A primeira é que pelo Teorema de Maxwell (versão para deslocamento unitário imposto, Equação (4.42)) a matriz é simétrica, isto é:

$$k'_{ji} = k'_{ij}. \quad (4.55)$$

A segunda observação vem da superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 4.26. Observa-se que os coeficientes de rigidez que correspondem a uma dada configuração deformada elementar têm o mesmo índice  $j$ . Pode-se dizer então:

- A  $j$ -ésima coluna da matriz de rigidez  $[k']$  de uma barra no seu sistema local corresponde ao conjunto de forças generalizadas que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la quando é imposta uma configuração deformada tal que  $d'_j = 1$  (deslocabilidade  $d'_j$  com valor unitário e as demais deslocabilidades com valor nulo).

O PDV vai ser utilizado nas próximas seções para deduzir os valores dos coeficientes de rigidez de uma barra de pórtico plano no sistema local. Essa dedução é feita para barras prismáticas, isto é, barras com uma seção transversal uniforme ao longo de seu comprimento. No Apêndice B é apresentado um processo, chamado Processo de Mohr (Süssekind 1977-2) ou Analogia da Viga Conjugada, que permite a determinação de coeficientes de rigidez para barras não prismáticas.

#### 4.4.2.1. Coeficientes de rigidez axial de barra

A determinação dos coeficientes de rigidez axial de uma barra pode ser feita de uma forma direta através da imposição do equilíbrio da barra que sofre uma deformação axial. Por exemplo, considere a imposição da deslocabilidade  $d_4$  mostrada na Figura 4.27. As forças externas  $f'_1$  e  $f'_4$  estão indicadas com seus sentidos positivos. Pode-se observar que para provocar o alongamento da barra é necessário ter um esforço normal de tração  $N = f'_4$ . Além disso, a força  $f'_1$  tem que ter o sentido contrário ao que está indicado para poder equilibrar a barra. A partir da relação  $\sigma_x^a = E\varepsilon_x^a$  entre a tensão e a deformação normais da barra, chega-se a:

$$\frac{N}{A} = E \frac{d_4}{l} \Rightarrow f'_4 = k'_{44} d_4 = \frac{EA}{l} d_4 \therefore k'_{44} = \frac{EA}{l};$$

$$f'_1 = -f'_4 \Rightarrow f'_1 = k'_{14} d_4 = -\frac{EA}{l} d_4 \therefore k'_{14} = -\frac{EA}{l}.$$

Entretanto, o PDV provê uma maneira mais geral para se chegar a esses mesmos resultados. Considere que se deseja determinar o valor do coeficiente de rigidez  $k'_{14}$ , que corresponde à força  $f'_1$  que deve atuar na extremidade esquerda da barra quando um deslocamento axial  $d_4 = 1$  é imposto isoladamente na extremidade direita. O campo de deslocamentos axiais reais desse problema é  $u(x) = N_4(x) \cdot d_4$ , conforme indicado na Figura 4.27. Para se calcular  $k'_{14}$ , deve-se escolher um campo de deslocamentos axiais virtuais tal que somente a força  $f'_1$  produza trabalho externo virtual. Esse campo é  $\bar{u}(x) = N_1(x) \cdot \bar{d}_1$ , também mostrado na Figura 4.27.

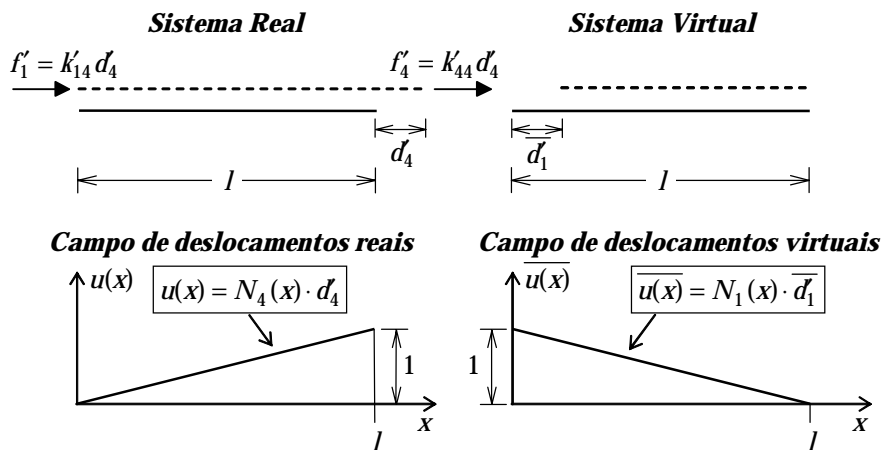


Figura 4.27 – Aplicação do PDV para obtenção de coeficiente de rigidez axial de uma barra isolada.

Aplicando o PDV com base na Equação (4.31), somente com a parcela da energia de deformação axial, chega-se a:

$$k'_{14} d_4 = \frac{1}{d_1} \left[ \int_0^l EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx \right] = \left[ \int_0^l EA \frac{dN_4}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \right] \cdot d_4.$$

Nessa expressão o valor do deslocamento virtual  $\bar{d}_1$  imposto na extremidade esquerda se cancela. Portanto, tem-se:

$$k'_{14} = EA \int_0^l \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_4}{dx} dx = -\frac{EA}{l}.$$

Vê-se que o PDV determina diretamente o valor do coeficiente de rigidez  $k'_{14}$  encontrado anteriormente, sem a necessidade de determinar outro coeficiente. Esse resultado pode ser generalizado para os outros coeficientes, bastando escolher os campos de deslocamentos real e virtual apropriados. Essa generalização resulta em:

$$k'_{ij} = EA \int_0^l \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} dx \quad (i, j = 1, 4) \tag{4.56}$$

Com base na Equação (4.56), os valores dos coeficientes de rigidez axial podem ser calculados. Os resultados estão mostrados na Figura 4.28.

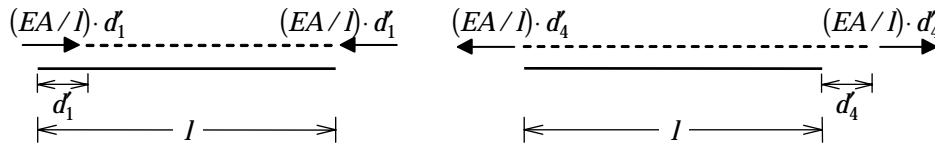


Figura 4.28 – Coeficientes de rigidez axial de uma barra isolada.

#### 4.4.2.2. Coeficientes de rigidez à flexão de barra sem articulação

O PDV também é utilizado para determinar de uma maneira geral os valores dos coeficientes de rigidez à flexão que estão associados às deslocabilidades  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_5$  e  $d_6$ . Considere que se deseja determinar o valor do coeficiente de rigidez  $k'_{23}$ , que corresponde à força  $f'_2$  que deve atuar na extremidade esquerda da barra quando uma rotação  $d'_3 = 1$  é imposta isoladamente também na extremidade esquerda. O campo de deslocamentos transversais reais é  $v(x) = N_3(x) \cdot d'_3$ , conforme indicado na Figura 4.29. Para se calcular  $k'_{23}$ , deve-se escolher um campo de deslocamentos transversais virtuais tal que somente a força  $f'_2$  produza trabalho externo virtual. Esse campo é  $\bar{v}(x) = N_2(x) \cdot \bar{d}'_2$ , tal como mostrado na Figura 4.29 superposto ao campo de deslocamentos reais.

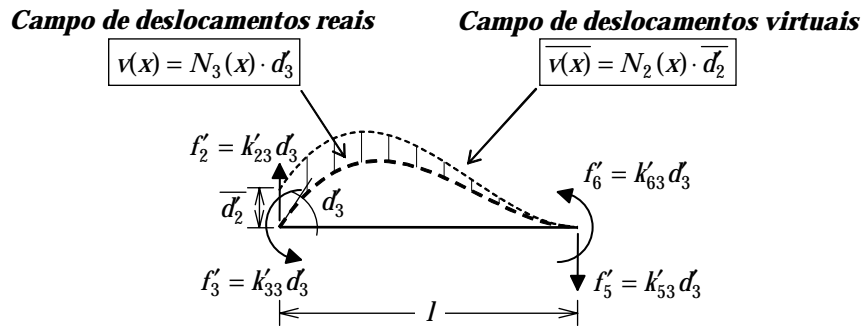


Figura 4.29 – Aplicação do PDV para obtenção de coeficiente de rigidez à flexão de uma barra isolada.

Utilizando a Equação (4.31) do PDV, chega-se a:

$$k'_{23} d_3 = \frac{1}{d_2} \left[ \int_0^l EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} dx \right] = \left[ \int_0^l EI \frac{d^2 N_3}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \right] \cdot d_3.$$

Nessa expressão o valor do deslocamento virtual  $\bar{d}_2$  se cancela. Portanto, tem-se:

$$k'_{23} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_2}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx.$$

A generalização desse resultado para as outros coeficientes resulta na Equação (4.57) abaixo. Os valores dos coeficientes de rigidez à flexão são calculados com base nessa equação. Os resultados estão mostrados na Figura 4.30.

$$k'_{ij} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx \quad (i, j = 2, 3, 5, 6) \quad (4.57)$$

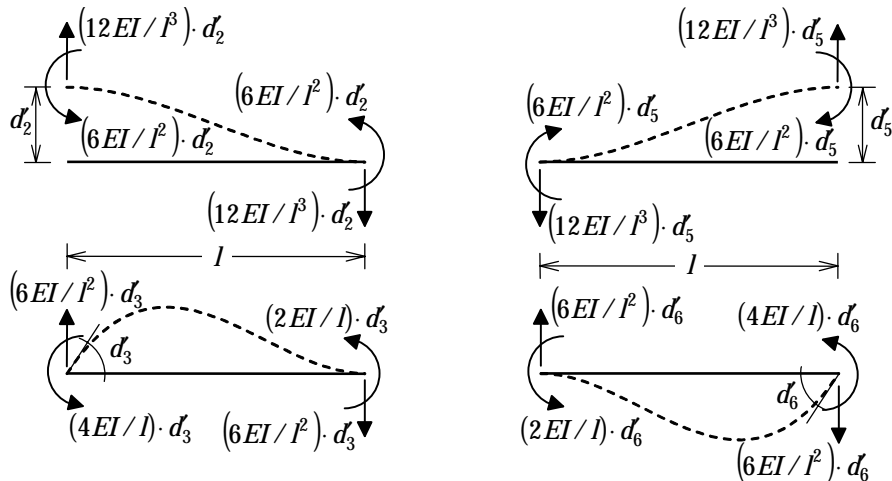


Figura 4.30 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada sem articulação.

### 4.4.2.3. Coeficientes de rigidez à flexão de barra com articulação na esquerda

Estruturas reticuladas muitas vezes apresentam barras articuladas em uma extremidade ou em ambas. No modelo estrutural isso é modelado por uma rótula na extremidade articulada que libera a continuidade de rotação da barra nessa extremidade com as outras barras adjacentes ou com um apoio.

Procedimentos análogos aos que foram adotados para determinar coeficientes de rigidez de barras sem articulação poderiam ser desenvolvidos para barras com articulação. Para tanto, seria necessária a determinação de funções de forma para barras articuladas. Entretanto, um procedimento mais simples, baseado em superposição de efeitos, pode ser adotado para determinar os coeficientes de rigidez de uma barra articulada. Considere, como exemplo, a barra articulada na extremidade esquerda mostrada na Figura 4.31. O objetivo nesse exemplo é a determinação dos coeficientes de rigidez à flexão associados à imposição de uma rotação unitária na extremidade direita.

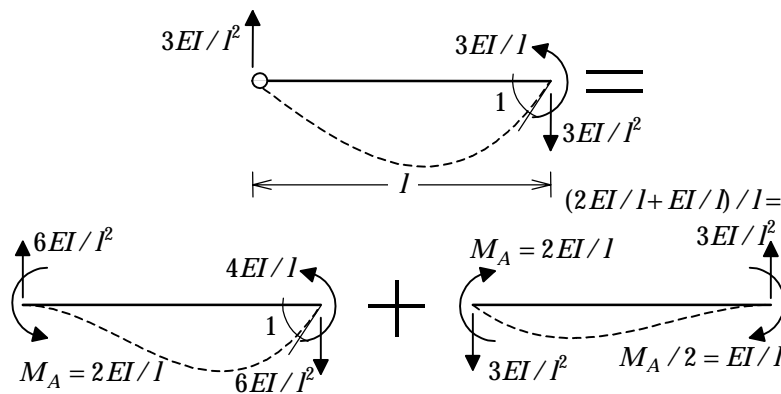


Figura 4.31 – Superposição de deformadas para obtenção de coeficientes de rigidez à flexão de uma barra com articulação na esquerda.

A Figura 4.31 mostra a configuração deformada da barra com a rotação unitária imposta, no sentido anti-horário, na extremidade direita. A articulação na extremidade esquerda faz com que o momento fletor nessa extremidade seja nulo. Essa condição pode ser alcançada com base na superposição de duas configurações deformadas da barra, tal como indicado nessa figura. A primeira parcela corresponde a uma rotação unitária imposta, no sentido anti-horário, na extremidade direita da barra sem articulação. Para garantir o equilíbrio nessa configuração, aparece um momento na extremidade esquerda  $M_A = 2EI/l$  no sentido anti-horário. A segunda parcela da superposição corresponde à aplicação de um momento  $M_A$  no sentido horário nessa extremidade, de tal forma que o momento final da superpo-

sição nessa extremidade seja nulo. As forças e momentos (coeficientes de rigidez) que atuam na barra articulada são obtidos das forças e momentos correspondentes nas parcelas da superposição.

Procedimentos análogos podem ser feitos para determinar os outros coeficientes de rigidez da barra com articulação na esquerda. Os resultados disso estão mostrados na Figura 4.32.

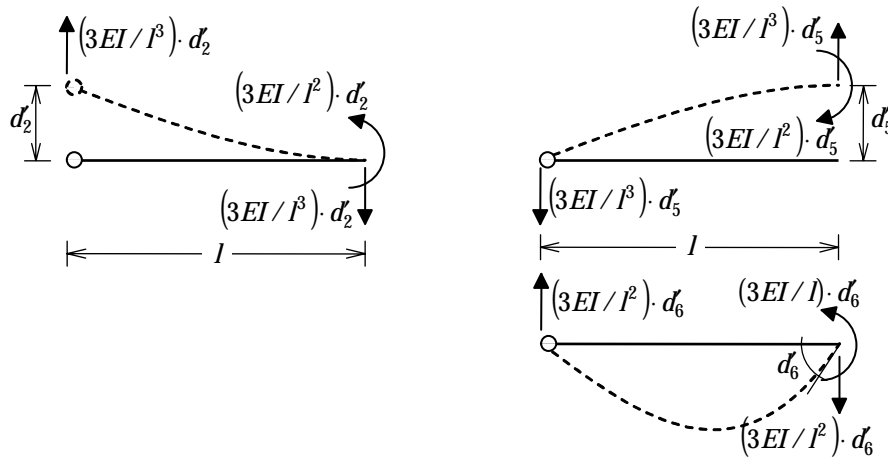


Figura 4.32 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada com articulação na esquerda.

Deve-se salientar que os coeficientes de rigidez associados à rotação unitária imposta na extremidade esquerda da barra são nulos. Isto porque a articulação faz com que não haja resistência à rotação imposta nessa extremidade.

#### 4.4.2.4. Coeficientes de rigidez à flexão de barra com articulação na direita

Os mesmos procedimentos mostrados na seção anterior para determinar coeficientes de rigidez de uma barra com articulação na esquerda são adotados para uma barra com articulação na direita.

A Figura 4.33 mostra a superposição de configurações deformadas que é utilizada para a determinação dos coeficientes de rigidez à flexão da barra com articulação na direita associados à imposição de uma rotação unitária na extremidade esquerda.

Todos os coeficientes de rigidez à flexão dessa barra estão mostrados na Figura 4.34. Nota-se também que os coeficientes associados à imposição de uma rotação unitária na extremidade articulada são nulos.

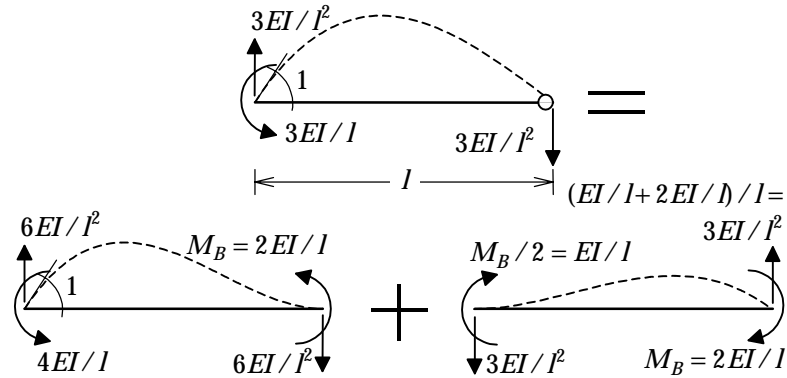


Figura 4.33 – Superposição de deformadas para obtenção de coeficientes de rigidez à flexão de uma barra com articulação na direita.

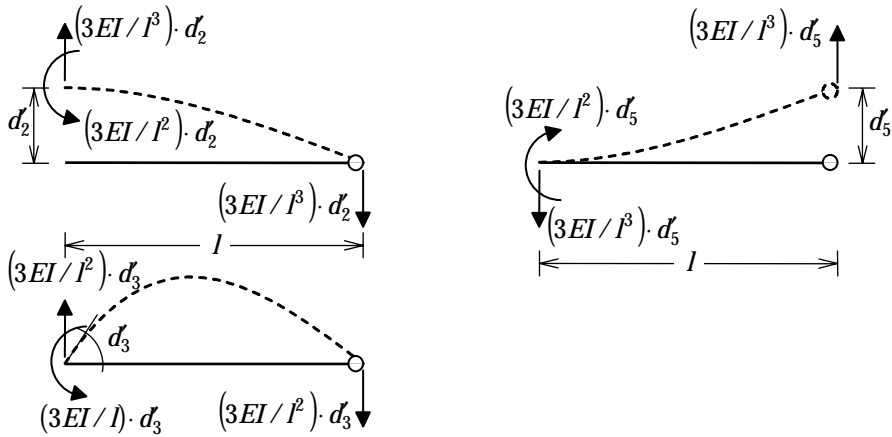


Figura 4.34 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada com articulação na direita.

#### 4.4.2.5. Matrizes de rigidez de barra de pórtico plano

Esta seção mostra matrizes de rigidez de barras de pórticos planos no sistema local para diferentes condições de extremidade. Isto resume os resultados para os coeficientes de rigidez de barra obtidos nas seções anteriores.

Quatro tipos de condições de extremidade são consideradas: barra sem articulação – Equação (4.58) –, barra com articulação na esquerda – Equação (4.59) –, barra com articulação na direita – Equação (4.60) – e barra com articulação nas duas extremidades – Equação (4.61). Os sinais dos coeficientes são positivos quando as forças e momentos correspondentemente têm os sentidos positivos das deslocabilidades (indicados na Figura 4.23). De outra forma, os sinais são negativos. Observa-se também a simetria das matrizes de rigidez, o que é compatível com a Equação (4.55).



Os coeficientes de rigidez axial são iguais para os quatro tipos de barra (primeiras e quartas linhas e colunas das matrizes de rigidez). Observa-se o desacoplamento entre o efeito axial e o efeito transversal de flexão pelos coeficientes nulos comuns a todas as matrizes. Nas matrizes, as linhas e colunas correspondentes às rotações das extremidades articuladas também são nulas. No caso da matriz de rigidez para a barra bi-articulada – Equação (4.61) – só os coeficientes de rigidez axial são diferentes de zero.

$$[k] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +12EI/l^3 & +6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & +6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +2EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & +12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +4EI/l \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +3EI/l^3 & 0 & 0 & -3EI/l^3 & +3EI/l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/l^3 & 0 & 0 & +3EI/l^3 & -3EI/l^2 \\ 0 & +3EI/l^2 & 0 & 0 & -3EI/l^2 & +3EI/l \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +3EI/l^3 & +3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^3 & 0 \\ 0 & +3EI/l^2 & +3EI/l & 0 & -3EI/l^2 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 0 & +3EI/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

### 4.4.3. Coeficientes de rigidez à torção de barra

A determinação dos coeficientes de rigidez à torção de uma barra de grelha ou de pórtico espacial pode ser feita utilizando o PDV, a exemplo do que foi feito para a barra de pórtico plano na seção anterior. Considere a imposição de uma rotação por torção  $\varphi_A$  na extremidade esquerda de uma barra isolada, enquanto a rotação na outra extremidade é mantida nula ( $\varphi_B = 0$ ), tal como mostra a Figura 4.35-a. Também considere a imposição de uma rotação  $\varphi_B$  na extremidade da direita, mantendo  $\varphi_A$  nula (Figura 4.35-b). São utilizadas setas duplas para representar rotações e momentos torçores.

Os momentos torçores  $T_A$  e  $T_B$  que atuam nas extremidades da barra para impor essas configurações deformadas também estão indicados na Figura 4.35 com seus sentidos positivos. Como não existe carregamento no interior da barra, o momento torçor é constante ao longo da barra. Além disso, a partir da Equação (4.30), vê-se que a rotação por torção  $\varphi(x)$  varia linearmente ao longo da barra. Portanto, a mesma funções de forma axiais das Equações (4.47) e (4.48) podem ser utilizadas para representar a variação de  $\varphi(x)$ , tal como indica a Figura 4.35.

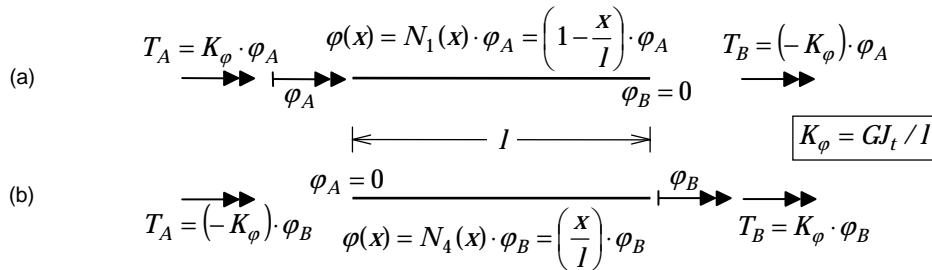


Figura 4.35 – Coeficientes de rigidez à torção de uma barra isolada.

O PDV é utilizado para determinar o momento torçor  $T_A$  da Figura 4.35-b. Este é o momento que deve atuar na extremidade esquerda da barra quando uma rotação por torção  $\varphi_B$  é imposta isoladamente na extremidade direita, considerando que  $\varphi_A = 0$ . O campo de rotações por torção reais desse problema é  $\varphi(x) = N_4(x) \cdot \varphi_B$ . O campo de rotações por torção virtuais é  $\bar{\varphi}(x) = N_1(x) \cdot \varphi_B$ , tal que somente o momento torçor da extremidade esquerda produza trabalho virtual externo. Aplicando o PDV com base na Equação (4.32), somente com a parcela de energia de deformação por torção, chega-se a:

$$T_A = \frac{1}{\varphi_B} \left[ \int_0^l GJ_t \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{dx} dx \right] = \left[ \int_0^l GJ_t \frac{dN_4}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \right] \cdot \varphi_B = \left( -\frac{GJ_t}{l} \right) \cdot \varphi_B.$$

O coeficiente de rigidez à torção é o fator que multiplica a rotação  $\varphi_B$ . O sinal negativo indica que o momento torçor  $T_A$  tem o sentido contrário ao da rotação  $\varphi_B$  imposta com sentido positivo. Esse resultado pode ser generalizado para os outros coeficientes, bastando escolher os campos de rotações real e virtual apropriados. Essa generalização resulta nos coeficientes de rigidez à torção mostrados na Figura 4.35 (os coeficientes são os fatores que multiplicam as rotações). Define-se genericamente o parâmetro  $K_\varphi$  como o *coeficiente de rigidez à torção*:

$$K_\varphi = \frac{GJ_t}{I} \quad (4.62)$$

Da mesma maneira como se definiu a matriz de rigidez de uma barra de pórtico plano no sistema de eixos locais da barra, é possível definir uma matriz de rigidez de barra de grelha. Uma grelha é uma estrutura plana com carregamento transversal ao seu plano. Por hipótese, uma barra de grelha não tem solicitações axiais, apresentando efeitos de flexão e cisalhamento transversais ao plano e efeito de torção. A Figura 4.36 mostra a convenção adotada neste livro para os eixos locais e para as deslocabilidades locais de uma barra de grelha. As deslocabilidades estão indicadas com seus sentidos positivos e as setas duplas indicam rotações.

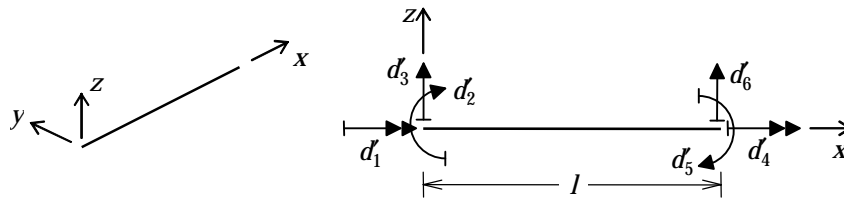


Figura 4.36 – Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de grelha isolada.

Com base na convenção adotada na Figura 4.36 e nos coeficientes de rigidez à flexão deduzidos na Seção 4.4.2, a Equação (4.63) mostra a matriz de rigidez de uma barra de grelha no sistema local. Esta matriz considera os coeficientes de rigidez à flexão e o coeficiente de rigidez à torção dado pela Equação (4.62). Os efeitos de deformação por cisalhamento não são considerados. O momento de inércia da seção transversal é  $I = I_y$ , isto é,  $I$  é o momento de inércia em torno do eixo local  $y$  mostrado na Figura 4.36.

$$[k] = \begin{bmatrix} +GJ_t/l & 0 & 0 & -GJ_t/l & 0 & 0 \\ 0 & +4EI/l & -6EI/l^2 & 0 & +2EI/l & +6EI/l^2 \\ 0 & -6EI/l^2 & +12EI/l^3 & 0 & -6EI/l^2 & -12EI/l^3 \\ -GJ_t/l & 0 & 0 & +GJ_t/l & 0 & 0 \\ 0 & +2EI/l & -6EI/l^2 & 0 & +4EI/l & +6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 0 & +6EI/l^2 & +12EI/l^3 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

#### 4.4.4. Reações de engastamento de barra para solicitações externas

Esta seção apresenta soluções fundamentais de engastamento perfeito de barras isoladas para carregamentos aplicados e solicitações de variação de temperatura. Essas soluções serão utilizadas dentro da metodologia do Método dos Deslocamentos que será introduzida no Capítulo 6.

A Figura 4.37 mostra a notação e os sentidos positivos das reações de engastamento perfeito para um carregamento genérico, em que:

$\hat{f}_i \rightarrow$  reação de engastamento perfeito de barra no sistema local: reação força ou momento que atua na direção da deslocabilidade local  $d_i$  de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando atua uma solicitação externa.

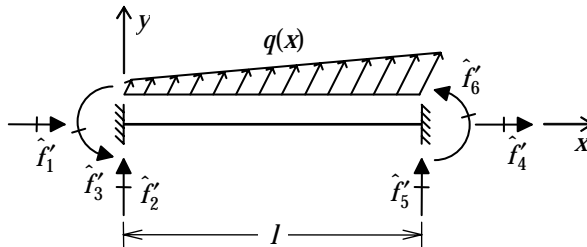


Figura 4.37 – Notação e sentidos positivos de reações de engastamento perfeito para barras isoladas.

Todas as deduções serão feitas para barras sem articulação. As reações de engastamento para uma barra com articulação podem ser obtidas a partir das reações de engastamento de uma barra sem articulação com o mesmo carregamento. A Figura 4.38 mostra a superposição de efeitos que é utilizada para a determinação das reações de engastamento de uma barra com articulação na esquerda. A Figura 4.39 faz o mesmo para uma barra com articulação na direita.

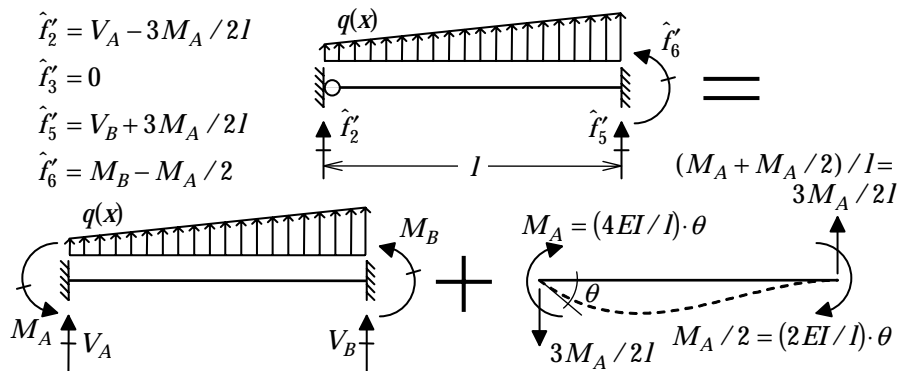


Figura 4.38 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento para barras com articulação na esquerda.

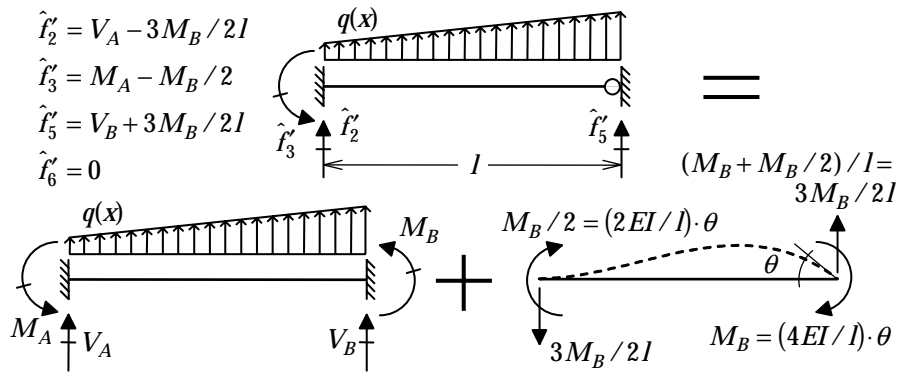


Figura 4.39 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento para barras com articulação na direita.

#### 4.4.4.1. Reações de engastamento para carregamentos externos

A determinação das reações de engastamento perfeito de uma barra solicitada para um carregamento externo genérico vai ser feita com base no Teorema de Betti, que foi apresentado na Seção 4.3.3, seguindo o que foi feito por Felton & Nelson (1996).

Para exemplificar isso, considere a barra bi-engastada mostrada na Figura 4.40 com um carregamento distribuído transversalmente. O objetivo do exemplo é determinar a reação força transversal  $\hat{f}_2'$  da extremidade esquerda da barra.

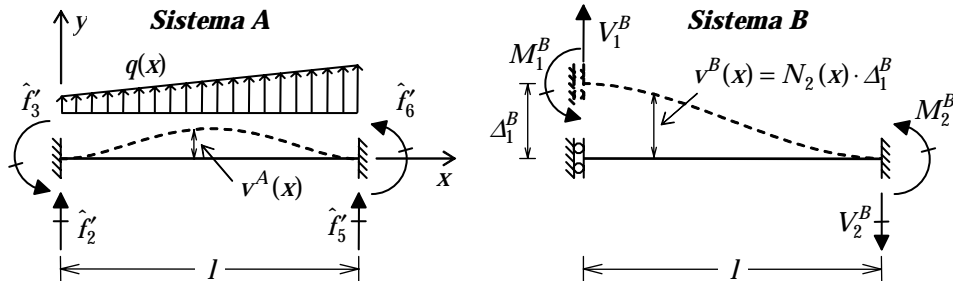


Figura 4.40 – Aplicação do Teorema de Betti para determinar a reação vertical na extremidade esquerda.

Para a aplicação do Teorema de Betti para o exemplo da Figura 4.40, é necessário definir dois sistemas, A e B. O sistema A é a barra bi-engastada com o carregamento externo aplicado e as correspondentes reações de apoio. O sistema B tem o vínculo associado à reação  $\hat{f}_2'$  liberado e uma força transversal  $V_1^B$  aplicada no ponto do vínculo liberado. A configuração deformada do sistema B é tal que seu campo de deslocamentos externos é proporcional à função de forma  $N_2(x)$ .

O Teorema de Betti aplicado ao exemplo da Figura 4.40 impõe o seguinte: “o trabalho realizado pelas forças e momentos externos do sistema *A* com os correspondentes deslocamentos e rotações do sistema *B* é igual ao trabalho realizado pelas forças e momentos do sistema *B* com os correspondentes deslocamentos e rotações do sistema *A*.”

Observa-se que todas as forças e momentos externos do sistema *B* têm deslocamentos e rotações correspondentes nulos no sistema *A*. Portanto, o trabalho das forças do sistema *A* com os deslocamentos do sistema *B* é nulo:

$$\hat{f}_2^r \cdot \Delta_1^B + \int_0^l q(x) \cdot N_2(x) \cdot \Delta_1^B \cdot dx = 0.$$

Dessa forma, chega-se a uma expressão para a determinação da reação desejada em função do carregamento transversal  $q(x)$ :

$$\hat{f}_2^r = - \int_0^l q(x) \cdot N_2(x) \cdot dx = 0.$$

Um exemplo análogo é utilizado para determinar a reação momento  $\hat{f}_3^r$  na extremidade esquerda pelo Teorema de Betti, tal como ilustrado na Figura 4.41. Nesse caso, no sistema *B* libera-se a rotação associada à reação  $\hat{f}_3^r$  no apoio da esquerda.

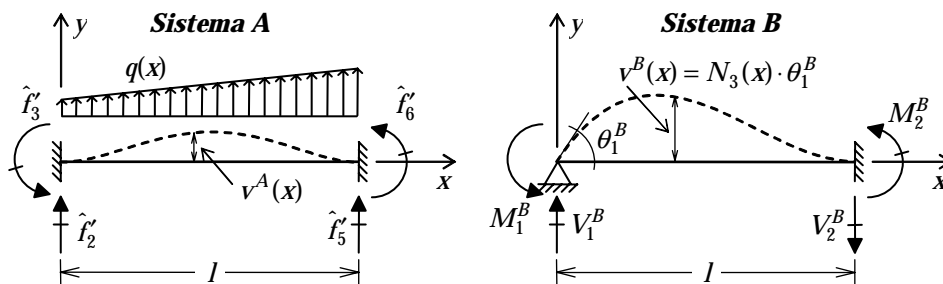


Figura 4.41 – Aplicação do Teorema de Betti para determinar a reação momento na extremidade esquerda.

O campo de deslocamentos externos do sistema *B* na Figura 4.41 é proporcional à função de forma  $N_3(x)$ , e a aplicação do Teorema de Betti para esse exemplo resulta em:

$$\hat{f}_3^r = - \int_0^l q(x) \cdot N_3(x) \cdot dx = 0.$$

Os resultados obtidos nos exemplos das Figuras 4.40 e 4.41 podem ser generalizados para diversos tipos de cargas: axiais, transversais distribuídas, transversais concentradas e momentos concentrados, tal como ilustrado na Figura 4.42.

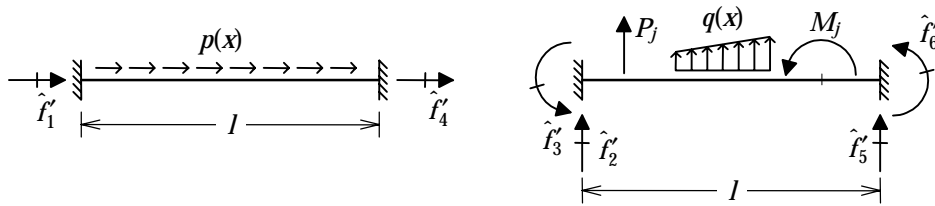


Figura 4.42 – Reações de engastamento perfeito axiais e transversais para barras isoladas.

A expressão (4.64), resultante da aplicação do Teorema de Betti, é utilizada para determinar as reações axiais  $\hat{f}_1'$  e  $\hat{f}_4'$  devidas a uma carga axial distribuída  $p(x)$ . A expressão (4.65) é utilizada para determinar as reações forças transversais  $\hat{f}_2'$  e  $\hat{f}_5'$  e as reações momentos  $\hat{f}_3'$  e  $\hat{f}_6'$  devidas a cargas transversais distribuídas, cargas transversais concentradas e cargas momentos concentrados (veja a Figura 4.42).

$$\hat{f}_i' = - \int_0^l N_i(x) \cdot p(x) \cdot dx \quad (i = 1, 4) \quad (4.64)$$

$$\hat{f}_i' = - \int_0^l N_i(x) \cdot q(x) \cdot dx - \sum_j N_i(x_j) \cdot P_j - \sum_j \frac{dN_j(x_j)}{dx} \cdot M_j \quad (i = 2, 3, 5, 6) \quad (4.65)$$

As Figuras 4.43, 4.44 e 4.45 mostram reações de engastamento de barras submetidas a carregamentos transversais. Estas reações foram determinadas com base na expressão (4.65) e, para as barras articuladas, com base nas Figuras 4.38 e 4.39.

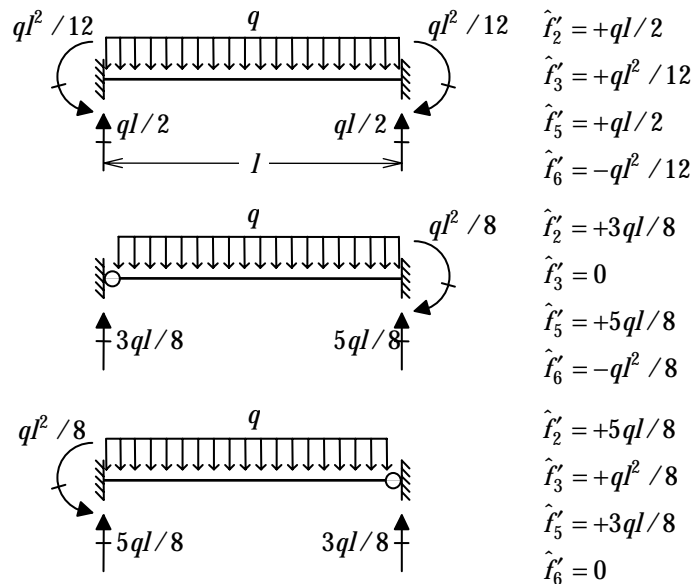


Figura 4.43 – Reações de engastamento para barras com carga transversal uniformemente distribuída.

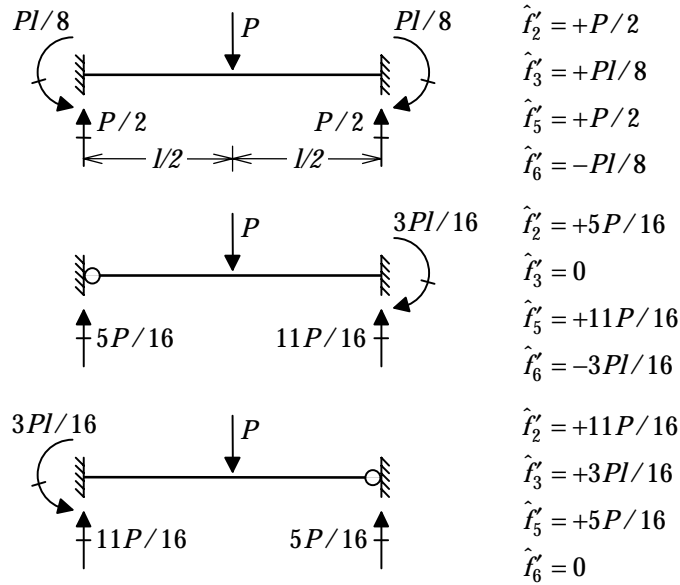


Figura 4.44 – Reações de engastamento para barras com carga concentrada no meio do vão.

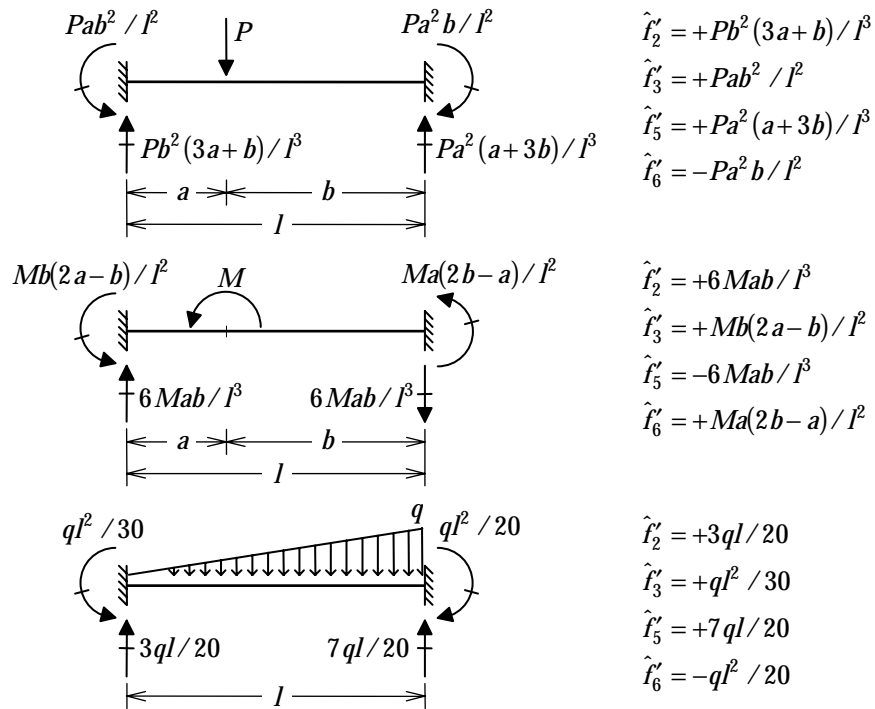


Figura 4.45 – Reações de engastamento para barras com carga concentrada, momento concentrado e carga triangular (West 1989).



Nesta seção as expressões para a determinação de reações de engastamento de barras isoladas solicitadas por carregamentos externos são exatas para o caso de uma barra com seções transversais que não variam ao longo de seu comprimento. Isto porque os campos de deslocamentos externos utilizados no sistema auxiliar para a aplicação do Teorema de Betti (sistema *B*) são proporcionais às funções de forma, que correspondem a soluções para barras com seção transversal constante. No Apêndice B é apresentado um processo, chamado Processo de Mohr ou Analogia da Viga Conjugada, que permite a determinação de reações de engastamento para barras não prismáticas.

#### 4.4.4.2. Reações de engastamento para variação de temperatura

Para finalizar as expressões para a determinação de reações de engastamento perfeito de barras isoladas, é necessário considerar as solicitações de variação de temperatura. Inicialmente será mostrado um procedimento simples (McGuire & Gallagher 1979), baseado em superposição de efeitos. Um método geral, baseado no PDV, vai ser mostrado mais adiante.

A Figura 4.46 ilustra o caso de uma variação uniforme de temperatura  $T_{CG}$ , correspondendo ao que ocorre na fibra do centro de gravidade da seção transversal. A barra tem um material com módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha$ . A seção transversal tem área  $A$  e momento de inércia  $I$ .

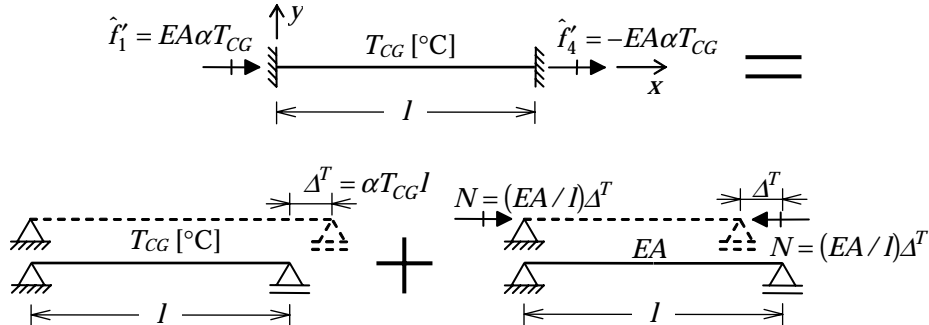


Figura 4.46 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento de uma barra com variação uniforme de temperatura (McGuire & Gallagher 1979).

O cálculo das reações de engastamento provocadas pela variação uniforme de temperatura do exemplo da Figura 4.46 é feito por superposição de efeitos, tendo como estrutura base a barra com o vínculo que impede o deslocamento axial do apoio da direita liberado. Na primeira parcela da superposição, a barra sofre a variação uniforme de temperatura e pode se alongar (ou encurtar) livremente. O deslocamento axial no apoio da direita é  $\Delta^T = \alpha T_{CG} l$ . Na segunda parcela da superposição, é aplicada uma força axial  $N = (EA/l)\Delta^T$  que impõe um deslocamento axial

desse apoio igual a  $\Delta^T$ , mas no sentido contrário. Observa-se que as reações de engastamento nesse exemplo são forças axiais iguais ao esforço normal  $N$ .

O cálculo das reações de engastamento para uma variação transversal de temperatura é feito de forma análoga por superposição de efeitos, tal como indicado na Figura 4.47. As parcelas da superposição têm os vínculos que impedem as rotações nas extremidades da barra liberados. Na primeira parcela ocorre uma deformação por flexão da barra devida à variação transversal de temperatura, na qual cada elemento infinitesimal de barra sofre uma rotação relativa interna  $d\theta^T$ , que é dada pela Equação (4.21). Na segunda parcela são aplicados momentos  $M = EI \cdot d\theta^T / dx$  nas extremidades da barra que anulam essa deformação. Observa-se que as reações de engastamento nesse exemplo são momentos iguais ao momento  $M$  aplicado.

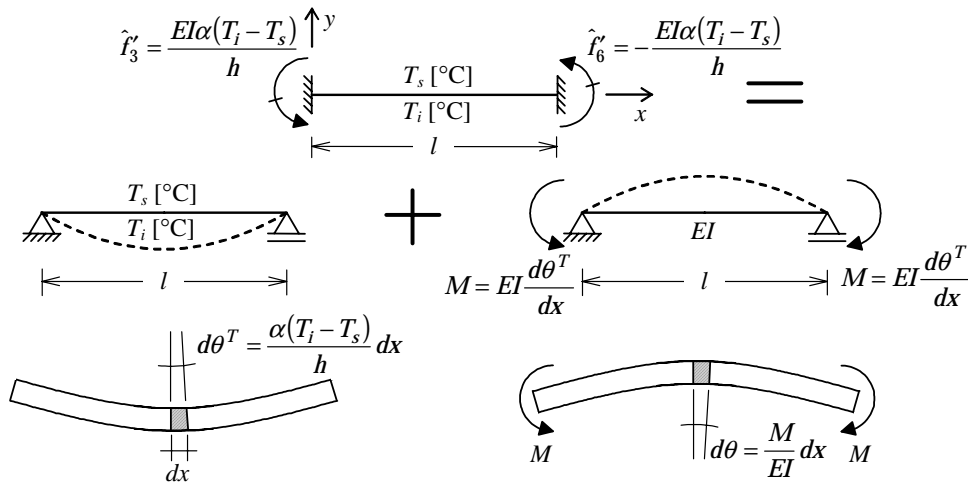


Figura 4.47 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento de uma barra com variação transversal de temperatura (McGuire & Gallagher 1979).

Os mesmos resultados encontrados acima podem ser alcançados de uma maneira mais formal com base na Equação (4.37) do PDV. O sistema real corresponde à barra bi-engastada que sofre uma variação axial e transversal de temperatura. Como pode ser observado nas Figuras 4.46 e 4.47, os deslocamentos finais reais axiais  $u(x)$  e transversais  $v(x)$  são nulos. Dessa forma, a Equação (4.37) se reduz a:

$$P = \frac{1}{\Delta} \left[ \int_0^l \left[ EA \left( -\frac{du^T}{dx} \right) \right] \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int_0^l \left[ EI \left( -\frac{d\theta^T}{dx} \right) \right] \cdot \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} dx \right]. \quad (4.66)$$

O sistema virtual é escolhido de tal forma que apenas a reação (real) de engastamento que se deseja determinar produza trabalho virtual externo. Portanto, para o cálculo da reação  $\tilde{f}_1'$  escolhe-se um campo de deslocamentos virtuais igual a

$\overline{u}(x) = \overline{d}_1 \cdot N_1(x)$ , sendo  $\overline{d}_1$  o deslocamento axial virtual na extremidade esquerda. De maneira semelhante, para o cálculo da reação  $\hat{f}'_2$  escolhe-se um campo de deslocamentos virtuais igual a  $\overline{v}(x) = \overline{d}_2 \cdot N_2(x)$ , e analogamente para as outras reações.

Com base nas Equações (4.66), (4.20) e (4.21), chega-se às expressões gerais para o cálculo das reações de engastamento de uma barra isolada provocadas por uma variação de temperatura:

$$\hat{f}'_i = -EA\alpha T_{CG} \cdot \int_0^l \frac{dN_i}{dx} dx \quad (i = 1,4) \quad (4.67)$$

$$\hat{f}'_i = -EI \frac{\alpha(T_i - T_s)}{h} \cdot \int_0^l \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx \quad (i = 2,3,5,6) \quad (4.68)$$

Sendo:

$EA \rightarrow$  parâmetro de rigidez axial, sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $A$  a área da seção transversal;

$EI \rightarrow$  parâmetro de rigidez transversal por flexão, sendo  $I$  o momento de inércia da seção transversal;

$\alpha \rightarrow$  coeficiente de dilatação térmica do material;

$h \rightarrow$  altura da seção transversal de uma barra;

$T_i \rightarrow$  variação de temperatura na fibra inferior de uma barra;

$T_s \rightarrow$  variação de temperatura na fibra superior de uma barra;

$T_{CG} \rightarrow$  variação de temperatura na fibra do centro de gravidade de uma barra.

As reações de engastamento calculadas pelas Equações (4.67) e (4.68) estão mostradas na Figura 4.48. Observa-se que os valores são os mesmos encontrados anteriormente nos exemplos das Figuras 4.46 e 4.47.

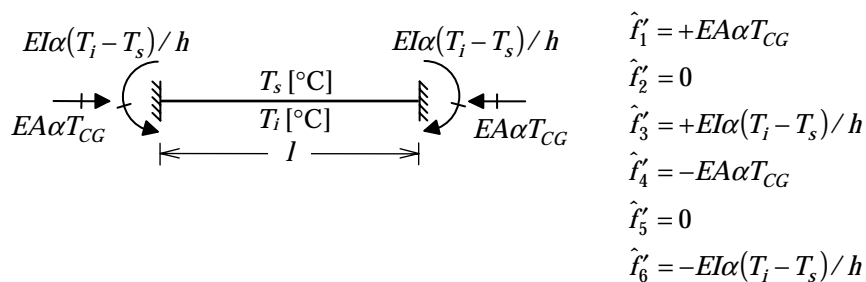


Figura 4.48 – Reações de engastamento para uma barra com variação de temperatura.